This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Digitized by Google

Math 9108.87

SCIENCE CENTER LIBRARY

BOUGHT WITH INCOME

FROM THE BEQUEST OF

HENRY LILLIE PIERCE,

OF BOSTON.

Under a vote of the President and Fellows,
October 24, 1898.

10 April, 1899.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

# MÉMOIRE

SUR L'EMPLOI

# DES COORDONNÉES CURVILIGNES

Digitized by Google

Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, tomes X et XI,
10e et 11e années, 1887-1888.

Digitized by Google

# MÉMOIRE

SUR L'EMPLOI

# DES COORDONNÉES CURVILIGNES

DANS LES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE

ET LES LIGNES GÉODÉSIQUES DES SURFACES ISOTHERMES

PAR

M. le Vte de SALVERT

DOCTEUR ÈS SCIENCES,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ LIBRE DES SCIENCES
DE LILLE.

BRUXELLES

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

*Rue de Louvain, 108.*

1887

Digitized by Google

Math 9108.87

HARVARD COLLEGE
APR 10 1899
LIBRARY.

Pierce fund

Digitized by Google

# RAPPORT DE M. P. MANSION,

Professeur à l'Université de Gand,

**Sur le mémoire de M. le V^te^ de Salvert intitulé : « Mémoire sur l'emploi » des coordonnées curvilignes dans les problèmes de mécanique et les » lignes géodésiques des surfaces isothermes. »**

---

Le mémoire de M. de Salvert est la suite ou le complément de celui qu'il a publié en 1881, dans les *Annales de la Société scientifique,* sur la *Théorie de la courbure des surfaces.* Dans l'un des chapitres de ce premier travail, l'auteur a établi de nouveau, autrement que Lamé, les formules générales que ce géomètre a données pour l'emploi des coordonnées curvilignes. Dans le manuscrit soumis à l'appréciation de la première section, M. de Salvert fait l'application de ces formules à la détermination directe du mouvement d'un point matériel en coordonnées curvilignes, d'abord d'une manière générale, puis dans le cas où le point est assujetti à rester sur une surface donnée; enfin, il traite la question de la recherche des lignes géodésiques.

Nous allons analyser successivement les trois divisions principales du mémoire, en faisant ressortir, autant que possible, les résultats nouveaux et intéressants obtenus par notre savant confrère de Lille.

PREMIÈRE PARTIE. Soient $\varphi(x, y, z) = \varphi$, $\psi(x, y, z) = \psi$, $\varpi(x, y, z) = \varpi$, trois surfaces appartenant à un système triplement orthogonal, dont les intersections déterminent la position d'un point mobile. Ce point mobile a, suivant les normales aux trois surfaces, des accélérations U, V, W, des vitesses $u$, $v$, $w$. Les expressions de U, V, W au moyen de $u$, $v$, $w$ et de leurs dérivées par rapport au temps, ont été données par Lamé sous trois formes différentes, dans ses *Leçons sur les coordonnées curvilignes.* L'auteur se propose d'abord d'établir par une voie nou-



Digitized by Google

velle celles qui figurent au § XC de ces *Leçons*; il y parvient par des calculs très simples, qui s'appuient sur diverses formules relatives à la courbure établies par lui dans son précédent mémoire. Mais les équations du mouvement, sous cette forme, sont peu symétriques. M. de Salvert les transforme habilement, et parvient à une forme nouvelle, plus élégante, absolument symétrique, et ne contenant plus les rayons de courbure principaux des surfaces $\varphi$, $\psi$, $\varpi$. Voici la première de ces formules :

$$\frac{U}{\Delta_1\varphi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{u}{\Delta_1\varphi}\right) + \frac{\delta \log \Delta_1\varphi}{\delta\varphi}u^2 + \frac{\delta \log \Delta_1\psi}{\delta\psi}v^2 + \frac{\delta \log \Delta_1\varpi}{\delta\varpi}w^2, \qquad (1)$$

où $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$ sont les premiers paramètres différentiels des fonctions $\varphi$, $\psi$, $\varpi$. Ainsi, par exemple,

$$\Delta_1^2\varphi = \left(\frac{\delta\varphi}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta\varphi}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta\varphi}{\delta z}\right)^2.$$

Si le rapport du second paramètre différentiel

$$\Delta_2\varphi = \frac{\delta^2\varphi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\varphi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2\varphi}{\delta z^2},$$

au carré du premier reste constant pour la surface $\varphi(x, y, z) = \varphi$, cette équation représente une famille de surfaces isothermes. Les expressions des valeurs de U, V, W données par Lamé (*Leçons*, § LXXIX, formule 6; § LXXXIX, formule 19), dans le cas où les surfaces $\varphi$, $\psi$, $\varpi$ appartiennent à un système triplement orthogonal de surfaces isothermes, sont ici établies d'une manière simple et rapide, en partant de la formule (1), ce qui montre la fécondité de celle-ci.

Cette formule (1) et les deux analogues pour V et W, ne sont pas encore celles auxquelles l'auteur veut arriver définitivement, parce qu'elles ne contiennent pas exclusivement les coordonnées curvilignes et leurs dérivées par rapport au temps. Il les transforme donc, et posant

$$H\Delta_1\varphi^2 = 1, \qquad K\Delta_1\psi^2 = 1, \qquad J\Delta_1\varpi^2 = 1,$$

Digitized by Google

il parvient à mettre l'équation (1) sous la forme suivante :

$$U\sqrt{H} = H\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{dH}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial H}{\partial \varphi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{\partial K}{\partial \psi}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{\partial J}{\partial \varpi}\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)^2\right]. \quad (2)$$

Si l'on désigne par $\frac{dn}{dt}, \frac{dn'}{dt}, \frac{dn''}{dt}$ les vitesses du point mobile suivant les normales aux surfaces $\varphi$, $\psi$, $\varpi$, on trouve qu'elles sont respectivement égales à

$$\sqrt{H}\frac{d\varphi}{dt}, \quad \sqrt{K}\frac{d\psi}{dt}, \quad \sqrt{J}\frac{d\varpi}{dt}.$$

Par suite, comme vérification de la formule (2), on obtient assez aisément l'équation des forces vives sous la forme

$$U\frac{dn}{dt} + V\frac{dn'}{dt} + W\frac{dn''}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u^2 + v^2 + w^2),$$

à peu près évidente *à priori*.

Arrivé à cet endroit de son travail, notre savant confrère se demande s'il n'y aurait pas moyen d'arriver directement à la formule (2). Évidemment. Il reprend donc à nouveau la question et, mettant les relations $\varphi(x, y, z) = \varphi$, $\psi(x, y, z) = \psi$, $\varpi(x, y, z) = \varpi$, sous la forme

$$x = f_1(\varphi, \psi, \varpi), \quad y = f_2(\varphi, \psi, \varpi), \quad z = f_3(\varphi, \psi, \varpi),$$

il introduit partout les dérivées partielles de $x, y, z$, par rapport à $\varphi, \psi, \varpi$, au moyen des formules faciles à démontrer :

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = H\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = K\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial x}{\partial \varpi} = J\frac{\partial \varpi}{\partial x}; \text{ etc.}$$

$$H = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2; \quad K = \text{etc.}, \quad J = \text{etc., etc.}$$

En s'appuyant sur ces formules, et partant de la relation

$$U = \frac{d^2x}{dt^2}\cos(x, U) + \frac{d^2y}{dt^2}\cos(y, U) + \frac{d^2z}{dt^2}\cos(z, U),$$

Digitized by Google

il retrouve directement l'expression (2), par des calculs très élégants, mais dont il est difficile de donner une idée sans les reproduire presque complètement.

Si l'on fait $t = s$, arc de la courbe parcourue par le point mobile, U, V, W deviennent les composantes de la courbure de cette courbe suivant les normales aux surfaces $\varphi$, $\psi$, $\varpi$. En particulier, si la courbe considérée est l'intersection des deux surfaces spéciales $\varphi$, $\psi$, cette remarque fournit immédiatement deux beaux théorèmes de Lamé sur la courbure (*Leçons*, §§ XXXVIII, XLI). M. de Salvert énonce le second sous une forme plus complète que l'éminent géomètre, et donne encore une traduction géométrique de ses formules dans le cas d'un système de coordonnées curvilignes isothermes.

Absolument parlant, on pourrait soutenir que les principaux résultats obtenus jusqu'à présent, c'est-à-dire, les formules (1) et (2), sont implicitement contenus dans les relations équivalentes de Lamé. Mais il n'en est pas de même de ce qui suit. M. de Salvert a observé ingénieusement que la démonstration directe de la formule (2) s'étend d'elle-même à un cas plus général que celui qui a été considéré antérieurement.

Considérant le mouvement d'un point sur une surface $F(x, y, z) = 0$, ce point étant rapporté à un système de coordonnées orthogonales tracé sur la surface, il montre que tous les calculs précédents subsistent comme pour un système triplement orthogonal où $\varpi$ (ou F) serait constant (*). Craignant quelque piège de raisonnement dans ce procédé rapide d'extension des

(*) On n'a donc pas besoin de déterminer un système triplement orthogonal auquel appartienne la surface donnée, ce qui, en pratique, peut être extrêmement difficile. Comme le remarque l'auteur, on n'est pas même astreint à supposer cette surface susceptible de faire partie d'un pareil système, bien que ce soit, en général, toujours possible, au moins théoriquement. Nous dirons *en général*, parce que cette proposition comporte peut-être des exceptions, comme la plupart de celles où l'on admet implicitement l'existence des dérivées des fonctions considérées. Soit dit en passant, la phrase où M. de Salvert fait allusion au théorème d'Ossian Bonnet aurait dû être plus explicite : ce théorème a rapport à une famille de surfaces et non à une surface individuelle, comme on pourrait le croire, en prenant le texte trop à la lettre.

Digitized by Google

résultats trouvés précédemment, nous avons refait les calculs de la méthode directe d'établissement de la formule (2), dans l'hypothèse où les surfaces $\varphi$, $\psi$ coupent $F = 0$ suivant des courbes trajectoires orthogonales l'une de l'autre. Nous avons trouvé, comme l'auteur,

$$U\sqrt{H} = H\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \varphi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \psi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\left(\frac{d\psi}{dt}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial K}{\partial \varphi}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \qquad (3_1)$$

$$V\sqrt{K} = K\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial K}{\partial \psi}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{\partial K}{\partial \varphi}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \psi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \qquad (3_2)$$

$$W\sqrt{HK} = P\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + Q\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + 2S\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt}, \qquad (3_3)$$

$$P = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix}, \quad S = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} & \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} & \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi \partial \psi} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix}.$$

La troisième formule donne lieu à une remarque importante.

Si les coordonnées orthogonales sur F sont les lignes de courbure, et si la trajectoire est la ligne géodésique, on trouve

$$W = \frac{H}{\rho_1}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{K}{\rho_2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2.$$

On a donc, pour cette courbe particulière, $(S : \sqrt{HK}) = 0$, et comme l'expression de S est indépendante de la forme de la courbe, il en sera de même pour une autre courbe quelconque, dans le système spécial de coordonnées ici employé. De plus, on trouve ainsi

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{P}{H^{\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{1}{\rho_2} = \frac{Q}{H^{\frac{1}{2}}K^{\frac{3}{2}}}$$

Digitized by Google

pour l'expression des courbures principales de la surface. Ces formules élégantes semblent nouvelles : elles peuvent servir à déterminer, pour la courbure $(1 : \rho_1\rho_2)$ de la surface, une formule plus élégante encore, équivalente à un résultat de Gauss.

Deuxième partie. Au début de la seconde partie, M. de Salvert met les équations $(3_1)$ $(3_2)$ sous une forme qui le conduit, pour la trajectoire d'un point mobile sur une surface, à une équation différentielle qui nous semble le résultat général le plus remarquable de tout le mémoire. Désignons les dérivées par rapport à $t$, par des accents, et soit $d\mathcal{F}(\varphi, \psi) = \mathrm{U}\sqrt{\mathrm{H}}d\varphi + \mathrm{V}\sqrt{\mathrm{K}}d\psi$, $\mathcal{F}(\varphi, \psi)$ étant la fonction de force, supposée existante.

Les équations $(3_1)$ $(3_2)$ pourront s'écrire, après multiplication, par $2\varphi'$, $2\psi'$.

$$d(u^2) + u^2\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial \psi}d\psi - \left(v^2\frac{\partial \log \mathrm{K}}{\partial \varphi} + 2\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi}\right)d\varphi = 0,$$

$$d(v^2) + v^2\frac{\partial \log \mathrm{K}}{\partial \varphi}d\varphi - \left(u^2\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial \psi} + 2\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi}\right)d\psi = 0.$$

On déduit de là, en tenant compte de l'équation des forces vives :

$$\tfrac{1}{2}d(u^2 + v^2) = d\mathcal{F}(\varphi, \psi) \qquad \text{ou} \qquad \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2) = \mathcal{F}(\varphi, \psi) + \mathrm{C},$$

et posant

$$\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}\left[\mathcal{F}(\varphi, \psi) + \mathrm{C}\right], \qquad \mathrm{K}_1 = \mathrm{K}\left[\mathcal{F}(\varphi, \psi) + \mathrm{C}\right],$$

l'équation différentielle

$$u^2d(v^2) - v^2d(u^2) = (u^2 + v^2)\left[u^2\frac{\partial \log \mathrm{H}_1}{\partial \psi}d\psi - v^2\frac{\partial \log \mathrm{K}_1}{d\varphi}d\varphi\right], \qquad (4)$$

ou encore

$$\mathrm{H}d\varphi^2 d(\mathrm{K}d\psi^2) - \mathrm{K}d\psi^2 d(\mathrm{H}d\varphi^2)$$
$$= (\mathrm{H}d\varphi^2 + \mathrm{K}d\psi^2)\left[\mathrm{H}d\varphi^2\frac{\partial \log \mathrm{H}_1}{\partial \psi}d\psi - \mathrm{K}d\psi^2\frac{\partial \log \mathrm{K}_1}{\partial \varphi}d\varphi\right].$$

Digitized by Google

Chaque fois que l'on parviendra à intégrer cette équation, c'est-à-dire, à trouver une relation entre $\varphi$ et $\psi$, l'équation des forces vives pourra ensuite servir à déterminer les coordonnées curvilignes en fonction de $t$.

Deux cas où l'intégration est facile se présentent d'eux-mêmes, savoir : 1° Lorsque

$$H_1 = \Phi(\varphi), \quad K_1 = \Psi(\psi), \quad \text{ou} \quad \frac{\delta \log H_1}{\delta \psi} = 0, \quad \frac{\delta \log K_1}{\delta \varphi} = 0;$$

2° Quand on a

$$H_1 = F(\varphi), \quad K_1 = \Phi(\varphi)\,\Psi(\psi),$$

ou

$$\frac{\delta \log H_1}{\delta \psi} = 0, \qquad \frac{\delta \log K_1}{\delta \varphi} = \text{fonction de } \varphi.$$

L'auteur en signale ensuite un troisième, savoir, celui où l'on a

$$H_1 = \Phi_2(\varphi)\,[\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)], \quad K_1 = \Psi_2(\psi)\,[\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)].$$

Dans ce cas,

$$\frac{\delta \log H_1}{\delta \psi} : [\Psi_1'(\psi)] = \frac{\delta \log K_1}{\delta \varphi} : [-\Phi_1'(\varphi)] = 1 : \omega,$$

avec la condition $\omega = \Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)$.

Ce troisième cas comprend le second, qui comprend lui-même le premier, mais on est forcé d'employer un procédé spécial pour intégrer les équations plus simples auxquelles on est conduit, dans les deux premiers cas.

Dans le cas d'un système triplement isotherme, les conditions précédentes sont remplies. Si, de plus, la fonction $\mathcal{F}$ vérifie la relation $(\mathcal{F} + C)[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)] = \Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)$, on se trouve dans le plus général des trois cas que nous venons de signaler, et l'on ramène à des quadratures, non seulement la détermination de l'équation de la trajectoire exprimée par une équation en $\varphi$ et $\psi$, mais aussi celle de la relation qui lie ces variables au temps.

Digitized by Google

On se trouve encore dans ce troisième cas où les intégrations peuvent se ramener aux quadratures, quand les expressions H, K, $\mathcal{J}$ sont de la forme plus générale

$$H = \Phi_1(\varphi)\,\Psi_1(\psi)\,\Omega(\varphi,\psi), \qquad K = \Phi_2(\varphi)\,\Psi_2(\psi)\,\Omega(\varphi,\psi),$$
$$\Omega\,\Psi_1(\psi)\,\Phi_2(\varphi)\big[\mathcal{J} + C\big] = \Phi(\varphi) - \Psi(\psi),$$

qui pourra se rencontrer lors même que le système ne sera pas triplement isotherme, mais qui coïncide également avec le cas précédent en supposant que $\Psi_1$ et $\Phi_2$ soient des constantes, $\Omega$ la différence entre une fonction de $\varphi$ et une fonction de $\psi$. Pour abréger, l'auteur distingue les deux cas dont il vient d'être question sous les titres *surfaces isothermes*, ou *surfaces non isothermes;* il faut entendre évidemment ces désignations des familles de surfaces composant le système coordonné auquel on rattache la surface proposée et non de cette surface elle-même.

Le lecteur peut se demander, à propos de ces exemples remarquables de réduction du problème aux quadratures, comment l'auteur a pu les découvrir. La réponse à cette question se trouve dans la première note de l'appendice du mémoire : c'est en exprimant la condition d'intégrabilité immédiate de l'équation différentielle où $(u^2 : v^2)$ serait la variable que M. de Salvert est arrivé à ces cas si étendus, où l'on peut achever la solution analytique de la détermination complète de la trajectoire. Mais il ne s'est pas arrêté là. Dans une seconde note, il traite la question générale du mouvement d'un point sur une surface quelconque *par la méthode* exposée dans la dynamique *de Jacobi*, et il est conduit de nouveau, d'une manière naturelle, dans le cas d'un système triplement isotherme ou non, aux cas d'intégrabilité complète signalés d'abord par lui. Les conditions imposées aux fonctions qui se rencontrent dans la question pour qu'on puisse ainsi pousser la solution jusqu'au bout sont donc essentielles, comme l'auteur le fait remarquer, et ne dépendent pas de la méthode qui y a conduit.

La fin de la seconde partie est consacrée à quatre applications particulières. Dans la première, le savant professeur de Lille

Digitized by Google

traite complètement la question du mouvement d'un point assujetti à rester sur un ellipsoïde, et soumis à une force d'attraction émanant du centre et proportionnelle à la distance. L'ellipsoïde faisant partie d'un système triplement isotherme, il utilise les formules générales qu'il a établies pour ce cas, et ramène la solution à des quadratures hyperelliptiques du premier genre. En note et en appendice, il signale les points de contact de cette solution avec celle de Jacobi dans les *Vorlesungen* (pour le cas particulier où la force est nulle), et avec un travail moins connu de Schellbach dans le tome LIV du *Journal de Crelle*. Schellbach a trouvé l'équation de la trajectoire, mais il n'est pas arrivé à la relation qui lie les coordonnées au temps. M. de Salvert montre, à la fin du mémoire, comment on peut retrouver ses propres résultats par la méthode de Jacobi.

La seconde application n'est pas moins intéressante que la première, et l'auteur n'y fait pas moins preuve d'habileté analytique. Une remarque ingénieuse, que l'on trouve d'ailleurs aussi dans un mémoire de Neumann cité par M. de Salvert, lui permet de déduire du système triplement orthogonal de l'ellipsoïde et des deux hyperboloïdes homofocaux, celui qui est composé de sphères et de deux séries de cônes orthogonaux les uns aux autres et ayant leur sommet au centre commun des deux sphères. Cette remarque lui permet d'utiliser une grande partie des calculs relatifs au mouvement d'un point sur l'ellipsoïde, dans la solution de la question analogue pour un point se mouvant sur l'un des cônes dont on vient de parler. Le point est soumis à deux forces, l'une émanant du sommet et variant en raison inverse du carré de la distance, l'autre de l'axe du cône et variant en raison inverse du cube de la distance à cet axe. L'auteur applique ici les formules données pour le cas où le système coordonné n'est pas supposé triplement isotherme. L'équation de la trajectoire dépend encore des intégrales hyperelliptiques les plus simples, mais l'une des coordonnées est liée au temps par une relation où n'entrent que des fonctions élémentaires, ce qui provient sans doute de l'heureux choix du système de coordonnées.

La troisième application est un problème traité par M. C. Neu-

Digitized by Google

mann, par le moyen des équations d'Hamilton et de Jacobi : « Déterminer le mouvement d'un point matériel astreint à demeurer sur une sphère, et soumis à l'attraction exercée suivant la loi newtonienne par la masse entière d'un ellipsoïde homogène immobile, dont le centre coïncide avec celui de la sphère, et qu'on suppose renfermer dans son intérieur le volume entier de la dite sphère. » M. de Salvert adopte, pour traiter ce problème, le système de coordonnées coniques qui lui a servi dans la question précédente, et il retrouve, en quelques pages, sans aucune difficulté, les résultats obtenus par M. Neumann.

La quatrième application se rapporte au mouvement d'un point matériel pesant, astreint à rester sur un paraboloïde donné (elliptique ou hyperbolique, mais non de révolution) dont l'axe est vertical; la vitesse initiale du point est supposée nulle. L'auteur déduit d'abord du système ellipsoïdal orthogonal, par passage à la limite, un nouveau système orthogonal, formé de trois paraboloïdes homofocaux, dont deux sont elliptiques et le troisième hyperbolique. Il montre ensuite que le paraboloïde donné appartient à un système de ce genre. Cela fait, il résout facilement la question proposée, d'une manière complète, au moyen de ses formules générales. Quoique les résultats auxquels M. de Salvert arrive ainsi contiennent des intégrales hyperelliptiques, il parvient à se rendre compte des principales circonstances du mouvement, par des considérations élémentaires, dans les trois cas qui peuvent se présenter : 1° Le paraboloïde donné est elliptique, et la pesanteur attire le mobile vers le sommet; 2° Le paraboloïde est elliptique, mais la pesanteur tend à éloigner le mobile du sommet; 3° Le paraboloïde est hyperbolique. Nous devons signaler ici spécialement la discussion relative au changement de signe des radicaux, qui permet à l'auteur d'établir d'une manière simple dans quel cas le mouvement est périodique, et lui fournit aussi la valeur des périodes.

Troisième partie. Au point de vue spéculatif, la dynamique se confond avec la cinématique, au moins quand on étudie le mouvement d'un seul point matériel; et la cinématique, à son tour, se

Digitized by Google

confond, comme on l'a remarqué, avec la géométrie pure, puisque la variable indépendante $t$ de la cinématique peut être remplacée par un paramètre à interprétation géométrique, sans que les calculs soient en rien altérés. L'étroite correspondance qui existe entre la théorie de la courbure et celle du mouvement d'un point sur une courbe, dépend de cette identité essentielle de la cinématique et de la géométrie, et elle a été signalée par M. de Salvert dans la première partie de son mémoire. Il y revient au début de la troisième partie, pour établir l'équation différentielle des lignes géodésiques, sans faire intervenir la définition mécanique de ces lignes, savoir qu'elles sont les trajectoires des points assujettis à se mouvoir sur une surface, sous l'influence unique de la vitesse initiale qui leur a été imprimée. Cette équation différentielle s'obtient, en supposant dans la formule (4) $\mathcal{F}$ constant. On trouve ainsi la relation

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{H}d\varphi^2 . d(\mathrm{K}d\psi^2) - \mathrm{K}d\psi^2 . d(\mathrm{H}d\varphi^2) \\ = (\mathrm{H}d\varphi^2 + \mathrm{K}d\psi^2)\left(\mathrm{H}d\varphi^2 \dfrac{\delta \log \mathrm{H}}{\delta \psi} d\psi - \mathrm{K}d\psi^2 \dfrac{\delta \log \mathrm{K}}{d\varphi} d\varphi\right), \end{array}\right.$$

beaucoup plus simple que l'équation aux dérivées partielles non linéaire de Jacobi, et plus avantageuse pour l'intégration que le système équivalent donné par Gauss, où $\varphi$ et $\psi$ sont liés à $s$ par deux équations différentielles.

L'équation différentielle (5) est intégrable dans les trois cas signalés plus haut à propos de l'équation plus générale (4). Il suffit de supposer $\mathcal{F} + \mathrm{C} = 1$. Ces trois cas d'intégration correspondent respectivement aux lignes géodésiques des surfaces cylindriques, des surfaces coniques ou de révolution, ou enfin aux surfaces susceptibles de faire partie d'un système triplement isotherme. D'après l'équation des forces vives, l'expression $\frac{ds}{dt}$ est constante dans le cas actuel ; autrement dit, $t$ et $s$ sont des variables liées par une relation de la forme $s = at + b$.

Dans les trois cas d'intégration signalés plus haut, on parvenait à trouver, non seulement la relation entre $\varphi$ et $\psi$, ou l'équation de la trajectoire, mais aussi la relation qui lie $t$ à $\varphi$ et $\psi$. Donc, dans

Digitized by Google

le problème des lignes géodésiques, on pourra ramener, pour chacun des trois cas, la détermination de l'équation de ces courbes et leur rectification à de simples quadratures. La valeur de W est d'ailleurs devenue celle de la courbure de la ligne géodésique; dans les divers cas où l'on peut trouver l'équation différentielle de cette ligne et la différentielle de son arc, on pourra aussi obtenir la valeur de W, comme l'auteur le montre en détail. Dans le troisième cas, qui est le plus général, on a

$$H = \Phi_2(\varphi)\left[\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)\right], \qquad K = \Psi_2(\psi)\left[\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)\right],$$

$$W = \frac{1}{\sqrt{J}\left[\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)\right]}\left\{\frac{\delta \log H}{\delta \varpi}\left[\Phi_1(\varphi) + C_1\right] - \frac{\delta \log K}{\delta \varpi}\left[\Psi_1(\psi) + C_1\right]\right\}.$$

Tout le reste du Mémoire est consacré à l'étude des lignes géodésiques des diverses catégories de surfaces. En voici l'énumération rapide.

1° *Plan;* 2° *Cylindre de révolution;* 3° *Surfaces cylindriques quelconques;* 4° *Cônes de révolution, sphères;* 5° *Surfaces de révolution.* M. de Salvert détermine, dans ce cas, l'arc et le rayon de courbure de la ligne cherchée; 6° *Surfaces coniques.* Sa méthode le conduit encore ici sans peine au résultat analytique voulu; mais peut-être exagère-t-il l'importance de ce résultat. M. Villié nous a communiqué une méthode simple et naturelle de trouver, en coordonnées ordinaires, les lignes géodésiques d'une surface conique $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$. On a, en effet, pour équation différentielle de ces lignes

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{d\frac{dy}{ds}}{f'\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{d\frac{dz}{ds}}{-1}.$$

On déduit de là

$$0 = xd\frac{dx}{ds} + yd\frac{dy}{ds} + zd\frac{dz}{ds} = d\left(x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} + z\frac{dz}{ds}\right) - ds,$$

$$x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} + z\frac{dz}{ds} = s + c, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = s^2 + 2cs + g,$$

Digitized by Google

ou, en développant sur un plan, $r^2 = s^2 + 2cs + g$, équation de droites. Mais cette remarque ne diminue en rien la valeur des précieux développements analytiques rencontrés par notre savant collègue de Lille, en cherchant l'équation de l'hélice conique et son rayon de courbure. Quelques-uns sont peut-être dignes de l'attention de ceux qui s'occupent d'analyse pure, parce qu'ils contiennent des intégrales hyperelliptiques, tandis que des résultats équivalents, dans le paragraphe suivant, ne renferment que des intégrales elliptiques. M. de Salvert cherche d'ailleurs aussi l'expression du rayon de courbure de l'hélice conique, en partant de la formule générale donnée dans son *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces*, et ce calcul direct, assez pénible, fait bien ressortir la supériorité des procédés de recherche exposés dans le présent travail.

Il termine la théorie générale relative aux surfaces coniques, par des applications aux surfaces spéciales ayant pour équations

$$(x^2 + y^2)^2 = z^2(x^2 - y^2), \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

$$y^2 = 2myz - \left(x - mz \arccos \frac{mz - y}{mz}\right)^2.$$

7° *Surfaces de second ordre.* Ce paragraphe est avec le dernier le couronnement du mémoire. L'auteur traite d'abord le cas de l'ellipsoïde et des deux hyperboloïdes. Il retrouve sans peine la solution obtenue par Jacobi dans les *Vorlesungen*, mais il y ajoute un résultat, nouveau probablement, savoir l'expression du rayon de courbure de la ligne géodésique sous une forme très élégante; par exemple, pour l'ellipsoïde, on a

$$\rho = -\frac{(\varphi\psi)^{\frac{3}{2}}}{Cabc}.$$

Il reprend ensuite l'étude des surfaces coniques, en employant pour système triplement orthogonal des sphères et deux séries de cônes : il n'entre alors dans les équations finales que

Digitized by Google

des intégrales elliptiques. Enfin, il aborde l'étude des paraboloïdes : il prend pour système coordonné les lignes de courbure de la surface même et il obtient ainsi, par une application directe de la méthode générale de la première partie, les résultats que Minding a trouvés en passant à la limite dans la solution de Jacobi pour l'ellipsoïde. Toutefois, il faut signaler encore ici l'expression élégante du rayon de courbure de la ligne géodésique

$$\rho = \frac{(p\psi)^{\frac{3}{2}}}{C\sqrt{pq}},$$

pour le paraboloïde $qx^2 + py^2 = 2pqz$.

8° *Surfaces composant un système orthogonal triplement isotherme.* Le cas d'une surface susceptible de faire partie d'un système orthogonal triplement isotherme comprend la plupart des cas examinés précédemment. Dans ce dernier paragraphe, l'auteur présente en quelque sorte la synthèse des résultats obtenus précédemment. A cet effet, il part des formules qui, d'après Lamé, caractérisent les quantités H, K, J pour un pareil système et il en détermine les lignes géodésiques. La solution s'applique même dans le cas où l'on n'emploie pas les coordonnées thermométriques. On peut ici encore ramener à des quadratures la rectification de la courbe et la détermination du rayon de courbure; l'expression qui donne celui-ci est très élégante, et relativement simple, si l'on tient compte de l'assez grande généralité des données.

Le mémoire de M. de Salvert se termine par un appendice étendu composé de trois notes. Nous avons déjà parlé des deux premières. La troisième, qui ne comporte pas moins de quarante-deux pages, est consacré d'abord à la détermination en grandeur et en direction du rayon de courbure de la trajectoire d'un point assujetti à rester sur une surface donnée, isotherme ou non; ensuite à des applications spéciales (ellipsoïdes, paraboloïdes, cônes du second ordre); enfin, dans ce dernier cas, où la force, émanant du sommet du cône, est supposée varier en raison

Digitized by Google

inverse du carré de la distance, l'auteur discute d'une manière complète le mouvement du point sur la surface, comme il l'a fait dans le corps même de la seconde partie, pour le mouvement sur sur le paraboloïde.

Telle est l'analyse du beau mémoire de M. de Salvert. Nous regrettons que notre incompétence dans la théorie des coordonnées curvilignes et en mécanique analytique nous empêche d'en signaler avec plus de précision la portée véritable et d'attirer l'attention sur tous les points particuliers qui sont propres à l'auteur (*). Autant que nous pouvons en juger, la réduction du problème du mouvement d'un point sur une surface à l'intégration de l'équation (4) et de l'équation des forces vives, nous semble constituer un progrès sérieux dans le domaine de la mécanique analytique du point matériel. Les applications que l'auteur a faites de sa méthode aux cas où l'intégration se réduit à de simples quadratures, soit dans la question du mouvement d'un point sur un ellipsoïde ou sur un cône, soit dans celle de la recherche des lignes géodésiques, en prouvent la fécondité pratique, si l'on peut ainsi dire. C'est un honneur, de retrouver, comme l'a fait M. de Salvert, des résultats que Jacobi n'a obtenus qu'en profitant des progrès de la dynamique accomplis pendant le quart de siècle écoulé depuis la mort de Lagrange. C'est un honneur surtout, quand ces résultats sont retrouvés et généralisés par une méthode systématique tout à fait différente de celle du géomètre de Königsberg.

Le mémoire de M. de Salvert est écrit avec une élégance et une clarté remarquables. Ce n'est pas lui qui pourrait dire avec le poète : *Brevis esse laboro, obscurus fio.* On pourrait plutôt

(*) A ma prière, M. Villié, professeur à l'Université catholique de Lille, a bien voulu dépouiller les grandes collections mathématiques (Crelle, Liouville, etc.), pour vérifier si aucun géomètre n'avait rencontré quelqu'un des résultats obtenus par M. de Salvert. De mon côté, j'ai fait quelques recherches semblables. Nous n'avons rien trouvé qui ne soit signalé par M. de Salvert lui-même dans les notes de son mémoire.

Digitized by Google

lui reprocher le défaut contraire. Le désir d'initier progressivement le lecteur à sa méthode d'intégration lui a fait traiter, peut-être avec un peu de prolixité, certains cas particuliers de la recherche des lignes géodésiques. Peut-être aussi pourrait-il rejeter en appendice, en l'abrégeant, le premier mode d'établissement des formules fondamentales, celui qui n'est pas direct, et suppose connu le mémoire de l'auteur cité au début de cette analyse. Enfin, nous regrettons l'emploi de la notation spéciale à l'auteur pour désigner les dérivées partielles d'une fonction $F(x, y, z,...)$ de plusieurs variables *indépendantes ou non,* par rapport à chacune de ces variables. Au lieu d'écrire, avec Jacobi, $\frac{\partial F}{\partial x}$, ou mieux, avec Laplace, $\frac{\partial F}{\delta x}$, M. de Salvert emploie la notation hardie $\frac{F}{x}$, dont il s'est servi dans son *Mémoire sur la courbure des surfaces.* Ne faudrait-il pas au moins indiquer explicitement, dans l'introduction, pour le lecteur qui n'a pas cet autre mémoire sous les yeux, le sens de cette fraction d'un nouveau genre (*).

Nous soumettons ces petites observations critiques à M. de Salvert, persuadé qu'il sait mieux que personne dans quelle mesure il y a lieu d'en tenir compte, et nous proposons à la section de voter l'impression de son remarquable travail et d'adresser des remerciements à l'auteur.

Gand, 30 septembre 1886.

---

(*) Il a été donné satisfaction à ce vœu, par une note insérée dans l'Introduction postérieurement au dépôt du Rapport.

Digitized by Google

# RÉSUMÉ ANALYTIQUE.


Pages.

AVANT-PROPOS . . . . . XIX

I. — *Équations du mouvement d'un point matériel en coordonnées curvilignes : formes signalées par Lamé; formes nouvelles. — Rayon de courbure d'une courbe donnée en coordonnées curvilignes.*

But et objet de ce chapitre . . . . . 4
Équations du mouvement en fonction des vitesses . . . . . 6
— — des coordonnées elles-mêmes . . . 13
Autre procédé direct pour établir les mêmes équations . . . . . 17
Expression du rayon de courbure d'une courbe en coordonnées curvilignes. — Théorèmes de Lamé . . . . . 24
Extension des mêmes formules à un système de deux coordonnées sur une surface quelconque . . . . . 30

II. — *Mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une surface donnée. — Cas de réduction du problème aux quadratures. — Exemples relatifs à l'ellipsoïde, au cône du second ordre, à la sphère, et au paraboloïde.*

Équation différentielle de la trajectoire . . . . . 41
Cas d'intégration de cette équation . . . . . 47
Conditions et formules de réduction du problème aux quadratures . . . 54
Exemple relatif à l'ellipsoïde . . . . . 68
— au cône du second ordre, et à la sphère . . . . . 77
— au paraboloïde; discussion et description complète du mouvement . . . . . 94

III. — *Problème des lignes géodésiques. — Solution générale pour toute surface, susceptible de faire partie d'un système orthogonal triplement isotherme. — Lignes géodésiques des surfaces cylindriques, coniques, de révolution, et des surfaces du second ordre.*

Équation différentielle des lignes géodésiques. Cas d'intégration par quadrature. . . . . 117
Expression de la longueur d'arc et du rayon de courbure de ces lignes. . 125
Application aux surfaces cylindriques . . . . . 129
— — de révolution . . . . . 135
— — coniques. Exemples . . . . . 148
— — isothermes en général. Cas particulier des surfaces du second ordre . . . . . 172


## APPENDICE.


NOTE I. — Sur l'intégration de l'équation différentielle de la trajectoire d'un point matériel, assujetti à rester sur une surface donnée . . 193

NOTE II. — Sur l'emploi de la méthode de Jacobi, pour traiter le même problème . . . . . 205

NOTE III. — Sur la détermination, en grandeur et en direction, du rayon de courbure de la même trajectoire. . . . . 213




Digitized by Google

Digitized by Google

# AVANT-PROPOS.

Le Mémoire que nous soumettons au jugement du Lecteur serait peut-être plus convenablement intitulé : *Sur le mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une surface donnée*, car c'est en réalité à cette question limitée, et à ses conséquences géométriques, qu'a rapport de beaucoup la plus grande partie de l'opuscule, l'autre partie, qui concerne le mouvement d'un point en général, ayant surtout pour objet de préparer les formules nécessaires pour aborder, à titre de cas particulier, le problème que nous venons de spécifier.

La solution que l'on donne de ce problème, en effet, dans tous les cours de Mécanique depuis Poisson, nous paraît aujourd'hui tout à fait insuffisante, et nous semble en conséquence appeler de nouvelles recherches, en ce que la forme des équations différentielles auxquelles on est amené par cette méthode, ainsi que le mode d'intégration de ces équations, varie, pour chaque problème spécial, à la fois avec la surface et avec la force données, tandis que les admirables travaux d'Hamilton et de Jacobi ont montré depuis lors que, pour tout système matériel à liaisons (et par conséquent pour la question précitée, qui ne spécifie après tout qu'un mode particulier de liaison, et l'un des plus simples), il existait, pour les équations différentielles du mouvement, à la fois, un type unique parfaitement déterminé, et un mode d'intégration, indépendants tous deux, et de la nature spéciale de ces liaisons, et des forces données. C'est donc cette *unité* de forme pour les équations, et ensuite de mode d'intégration, que nous avons

Digitized by Google

cherché à réaliser dans cette question restreinte, à l'aide de procédés entièrement semblables à ceux que l'on emploie habituellement dans les ouvrages classiques, et cela sans faire intervenir en quoi que ce soit, bien entendu, les méthodes supérieures que nous citions tout à l'heure, et qui, en raison de leur élévation même, n'ont pas encore pris place dans l'enseignement d'une façon générale et définitive.

Nos équations (53) ou (54), et (55) (pp. 45, 46 et 47), réalisent complètement la partie différentielle de ce programme, en fournissant pour l'équation différentielle de la trajectoire une forme simple, qui subsiste quelles que soient la force et la surface données. Quant à la partie intégrale, nos équations (77) ou (80) (pages 58 ou 60) la réalisent également, mais en partie seulement, en ramenant la solution aux quadratures dans un cas fort étendu exprimé par les conditions (76), qui comprennent six fonctions entièrement arbitraires, et qui laissent dès lors une assez grande latitude, tant pour le choix de la force que pour celui de la surface donnée. Nous fournissons la preuve de cette assertion, en traitant quatre exemples d'application de cette méthode, exemples relatifs à l'ellipsoïde, au cône du second ordre, à la sphère, et au paraboloïde (non de révolution), à propos de chacun desquels nous résolvons complètement la question, y compris l'évaluation des constantes en fonction des données, et la détermination en grandeur et en direction du rayon de courbure de la trajectoire.

De même, pour la recherche des lignes géodésiques des surfaces, qui n'est à vrai dire que le cas particulier le plus simple du problème précédent, alors que tous les résultats enseignés ou connus jusqu'à ce jour sont obtenus chacun par un procédé différent suivant la surface, et que le succès de l'opération dépend

Digitized by Google

par conséquent de la plus ou moins grande dextérité de l'analyste qui l'entreprend, nous systématisons cette recherche, et codifions en quelque sorte les résultats connus, en même temps que nous fournissons le moyen d'en obtenir de nouveaux, à l'aide de deux formules *uniques*, l'une différentielle (124) (page 118), propre à toutes les surfaces sans exception, et l'autre intégrale (136) (page 124), s'appliquant à toutes les surfaces cylindriques, coniques, de révolution, et aux surfaces du second ordre, et embrassant dès lors la plupart de celles sur lesquelles se porte le plus fréquemment l'attention ; enfin, nous donnons en même temps, par les formules (137) et (138) (pages 126 et 127) l'expression de la longueur d'arc et du rayon de courbure de ces lignes.

Le but et les résultats principaux de notre travail étant ainsi indiqués, le lecteur nous permettra de lui signaler encore, ainsi qu'il suit, en outre des précédents, ceux que nous croyons nouveaux, ou particulièrement dignes de son attention.

1° Deux formes nouvelles, symétriques et commodes, des équations différentielles du mouvement d'un point matériel en coordonnées quelconques (équations (7), page 11, et (8) et (9), page 15);

2° Deux expressions, corrélatives des équations précédentes, des composantes de la courbure en un point quelconque d'une courbe supposée donnée en coordonnées curvilignes (formules (28) et (29), page 23);

3° La forme simple et remarquable de la solution de l'exemple de mouvement relatif à l'ellipsoïde (équations (106$^{ter}$), pages 74 et 75), problème déjà traité par M. Schellbach (*), mais d'une

(*) *Journal de Crelle*, t. LIV (1857), p. 380.

Digitized by Google

façon incomplète, qui ne met pas en évidence les deux fonctions hyperelliptiques de la première classe dont se compose la solution ;

4° Notre théorie des lignes géodésiques des surfaces coniques (équations (174), page 155, et (179), page 159), et les exemples dont nous l'appuyons (pages 164-172), et aussi la solution pour le cône de révolution (équation (149), page 138) ;

5° L'expression du rayon de courbure des lignes géodésiques de l'ellipsoïde, du cône du second ordre et du paraboloïde, formules que ne donne pas Jacobi (formules (205), page 176, (209$^{bis}$), page 179, et (218), page 185) ;

6° Enfin, comme témoignage irrécusable de la commodité de nos formules, et des services qu'elles peuvent rendre, qu'on nous permette, en terminant, d'invoquer les deux exemples de mouvement relatifs au paraboloïde (pages 94-116), et au cône du second ordre (Note III, en Appendice, pages 227 *ad finem*), dans lesquels la discussion des résultats fournis par notre théorie représente aux yeux, pour ainsi dire, la physionomie très nette du mouvement dans les différents cas.

Un dernier mot au sujet d'une locution d'apparence incorrecte, qui pourrait surprendre ou impressionner défavorablement le Lecteur. La qualification d'*isotherme*, appliquée à une famille de surfaces, comporte un sens parfaitement défini, que nous n'avons pas besoin de rappeler ; mais il n'en n'est plus de même, dans le langage habituel, si on la suppose appliquée à une surface considérée isolément (*), attendu qu'il existe une infinité de familles de surfaces isothermes, qui reproduiront, cha-

(*) Voir à ce sujet l'Errata en tête du Mémoire, notamment pour les corrections relatives aux pages 55, 61, et 82.

Digitized by Google

cune pour une valeur du paramètre convenablement déterminée, cette même surface individuelle arbitrairement choisie (*), et dès lors cette qualification d'isotherme, employée dans ces conditions, n'aura aucun sens, à moins que l'on ne soit convenu de lui en attribuer un, expressément défini à l'avance. Nous prévenons donc, une fois pour toutes, qu'en vue d'abréger le discours, l'expression de « surface isotherme, » appliquée à une surface individuelle, tiendra lieu pour nous de la circonlocution « surface susceptible de faire partie d'un système orthogonal triplement isotherme, » catégorie fort étendue, nettement délimitée par LAMÉ tout d'abord, et plus récemment par BETTI (**), qui se compose uniquement de surfaces appartenant aux différentes classes énumérées un peu plus haut, et sur laquelle nous nous proposons de revenir prochainement à notre tour, dans le même esprit,

---

(*) La condition pour qu'une famille de surfaces $\varphi(x, y, z) = \lambda$ soit dite *isotherme*, c'est-à-dire pour qu'elle soit apte à caractériser l'ensemble des points doués d'une même température dans un milieu homogène et isotrope en équilibre de température, consiste en ce que son paramètre $\lambda$ (ou la fonction $\varphi(x, y, z)$ à laquelle il est égal), vérifie l'équation aux dérivées partielles du second ordre $\frac{\Delta_2 \lambda}{\Delta_1^2 \lambda} = F(\lambda)$, F désignant une fonction complètement arbitraire, laquelle équation peut dès lors être considérée comme la définition analytique de cette catégorie de surfaces.

Si on la suppose intégrée sous cette forme, l'intégrale générale qui fournira l'expression de $\lambda$ en $x, y, z$, comprendra des fonctions arbitraires, qui seront telles que $\lambda$ puisse se réduire pour $z = z_0$ ($z_0$ désignant une constante *numérique* arbitrairement choisie) à une fonction donnée arbitrairement d'$x$ et $y$, ou, en d'autres termes, que la famille de surfaces isothermes admette pour traces sur un plan donné parallèle aux $xy$ une famille de courbes arbitrairement choisie. Mais l'on pourra aussi, avant d'intégrer cette même équation, changer de variables, et prendre $z$ pour inconnue et $x$, $y$, et $\lambda$, pour variables indépendantes. Or, si on l'intègre sous la dernière forme ainsi obtenue, l'intégrale générale, qui exprimera alors $z$ en fonction d'$x$, $y$, et $\lambda$, devra renfermer des fonctions arbitraires qui soient telles que, pour une valeur *numérique* $\lambda = \lambda_0$ arbitrairement choisie, la valeur de $z$ se réduise à une fonction arbitrairement donnée $z = f(x, y)$, c'est-à-dire que l'intégrale reproduise alors une surface quelconque, arbitrairement donnée à l'avance; et comme la constante $\lambda_0$ est arbitraire, il y aura une infinité d'équations différentes entre $z$, $x$, $y$, et $\lambda$, c'est-à-dire une infinité de familles distinctes de surfaces isothermes, qui toutes satisferont à la condition que nous venons de dire.

(**) *Annali di matematica pura ed applicata*, Serie II, T. VIII (1877) (pagina 138-145).

Digitized by Google

et avec la même pensée de faciliter l'introduction de cette importante question dans l'enseignement classique.

Puisque nous venons d'écrire pour la seconde fois ce mot, qui trahit nos préoccupations en écrivant ce Mémoire, le Lecteur voudra bien nous pardonner l'usage habituel de procédés qui sentent peut-être un peu trop l'école, tels que vérifications fréquentes, applications et exemples répétés, etc., et voir surtout dans ce travail un Essai dédié aux jeunes intelligences en possession des seules connaissances classiques (*), et destiné à leur faciliter l'accès des méthodes supérieures et fécondes des Maîtres de la Science moderne.

---

(*) Ce Mémoire, de même que le précédent, *Sur la théorie de la courbure des surfaces*, a été composé en vue de leçons orales, faites à l'Université Catholique de Lille, à titre de conférences aux jeunes Licenciés, aspirants au Doctorat ès sciences mathématiques, et avec la pensée de leur faciliter en particulier la lecture des ouvrages de LAMÉ et de JACOBI.

Digitized by Google

# ERRATA.

Page 21, pour les derniers termes de chacune des trois équations (21), au lieu de

$$2\frac{x^2}{\psi}\varphi'\psi', \qquad 2\frac{y^2}{\psi}\varphi'\psi', \qquad 2\frac{z^2}{\psi}\varphi'\psi',$$

lire respectivement

$$2\frac{x^2}{\varphi\psi}\varphi'\psi', \qquad 2\frac{y^2}{\varphi\psi}\varphi'\psi', \qquad 2\frac{z^2}{\varphi\psi}\varphi'\psi'.$$

Page 27, omis le numéro (31) devant le premier groupe de six équations réunies par une accolade.

Page 53. 2de équation (68), au lieu de

$$K_1 = \Psi_1(\psi)\left[\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)\right],$$

lire

$$K_1 = \Psi_2(\psi)\left[\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)\right].$$

Page 55, 4e ligne, après la rubrique 1° *Surfaces isothermes*, au lieu de « pour toute surface isotherme susceptible de faire partie d'un système orthogonal, et l'on sait combien est vaste la catégorie... », lire « pour toute surface susceptible de faire partie d'un système orthogonal triplement isotherme, et l'on connaît exactement l'étendue de la catégorie... »

Page 60, équation (80), 2de intégrale de la 2de équation, au lieu de

$$\int_{\varphi_0}^{\psi} \ldots d\psi, \qquad \text{lire} \qquad \int_{\psi_0}^{\psi} \ldots d\psi,$$

Avant-dernière ligne, au lieu de « hypothèses (86) », lire « hypothèses (76) ».

Page 61, 2de ligne, après la rubrique 2° *Surfaces non isothermes*, supprimer les mots « n'étant pas isothermes ».

Page 82, 1er alinéa, 4e ligne, au lieu de « la surface étant encore isotherme d'une part », lire « les surfaces composant le système (107) étant encore toutes trois isothermes d'une part,... »

Page 87, 5e ligne d'équations, en commençant par le bas, intercaler dans les crochets de second membre et dans la parenthèse, le signe $\pm$ devant le terme $\frac{1}{2}F(\lambda)$.

Page 90, équation (115bis), au lieu de $\frac{r}{r_0} = \ldots$, lire $\frac{r_0}{r} = \ldots$

*Id.* avant-dernière ligne de la note en petit texte, au lieu de « II° *Cône*... », lire « III° *Cône*... »

Page 93, dernière ligne d'équations, au lieu de $\pm\int_{\mu_0}^{\lambda}$, lire $\pm\int_{\lambda_0}^{\lambda}$.



Digitized by Google

Page 104, dans la note en petit texte, première ligne d'équation, au lieu de

$$\int \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda(\mu+\lambda)\cdots}}, \quad \text{lire} \quad \int \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda(p+\lambda)\cdots}}.$$

Page 149, 12e ligne en commençant par le bas, au lieu de « dans les *Vorlesungen über Dynamik* », lire « par JACOBI dans ses *Vorlesungen über Dynamik* (*) », et ajouter, à titre de renvoi au bas de la page, la note suivante : « (*) Nous voulons parler des leçons orales du maître (1842), et non de l'ouvrage qui n'a été publié qu'en 1862 par CLEBSCH après la mort de JACOBI. »

Page 154, 4e ligne du texte, en commençant par le bas, après les mots « que nous venons de trouver pour K », ajouter ceux-ci « et que l'on fasse ensuite $\varpi = 0$, ».

Page 179, omis le numéro (209bis) devant la dernière équation.

Page 196, équation 5, au lieu de $C^{\int F(\varphi)\,d\varphi}$, lire $e^{\int F(\varphi)\,d\varphi}$.

Page 228, équation (16), première ligne, au lieu de

$$-\frac{1}{2}u_0^2 v_0^2, \qquad \text{lire} \qquad \frac{1}{2}u_0^2 v_0^2;$$

3e ligne, au lieu de

$$\int \sqrt{\frac{1}{-f(\lambda)}}\,d\lambda, \quad \text{lire} \quad \int \sqrt{\frac{\lambda}{-f(\lambda)}}\,d\lambda;$$

*Idem*, équation (17), au lieu de $= \frac{1}{v_0^2 r_0}$, lire $\frac{k}{v_0^2 r_0}$.

Page 238, dernière ligne, dernière équation, au lieu de

$$T = \cdots\cdots = 2m\pi k\left[2k - (u_0^2 + v_0^2)r_0\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

lire

$$T = \cdots\cdots = 2m\pi k\left[\frac{2k}{r_0} - (u_0^2 + v_0^2)\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Page 241, première ligne, au lieu de « qu'un seul minimum », lire « qu'un minimum seulement ».

Digitized by Google

# MÉMOIRE

SUR L'EMPLOI

# DES COORDONNÉES CURVILIGNES

DANS LES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE

ET LES LIGNES GÉODÉSIQUES DES SURFACES ISOTHERMES.

---

Dans un mémoire assez étendu *Sur la théorie de la courbure des surfaces*, publié il y a quelques années dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (5e année, 1881), nous avons été amené à établir à nouveau par des procédés plus simples, et à l'aide d'une autre notation plus claire et plus expressive, les formules générales que Lamé a données pour l'emploi des coordonnées curvilignes; mais les bornes nécessairement imposées à ce travail, déjà trop long peut-être eu égard au peu de nouveauté du sujet, nous ont empêché de présenter aucune application de ces formules, en sorte que le lecteur qui n'eût pas connu les travaux originaux sur la matière aurait pu être amené à penser que ces formules n'ont qu'un intérêt purement théorique, et à juger comme conséquence que l'utilité qu'elles peuvent offrir ne vaut pas la peine encore assez sérieuse que l'on s'est donnée pour les établir.

Nous voudrions aujourd'hui combler cette lacune, à laquelle nous ne nous étions résigné qu'à regret dans notre précédent travail, et nous nous proposons, dans celui-ci, de reprendre de même à nouveau, avec les notations et à l'aide des procédés dont nous avons fait usage pour l'étude de la courbure des surfaces,

Digitized by Google

l'une des trois questions principales que Lamé présente comme application de sa théorie, savoir la détermination directe du mouvement d'un point matériel par le moyen de ses coordonnées curvilignes, nous réservant de revenir un autre jour sur les deux autres questions, savoir le problème de l'équilibre de température dans un corps homogène et la recherche d'un système orthogonal triplement isotherme.

Après avoir passé en revue dans un premier chapitre les formes diverses que l'on peut donner aux équations du mouvement d'un point en coordonnées curvilignes, nous nous en servirons dans le second chapitre, pour traiter l'important problème du mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une surface donnée, et dans le troisième et dernier chapitre pour faire une étude détaillée des lignes géodésiques des différentes surfaces, que l'on a le plus souvent l'occasion de considérer.

Ce nouveau travail formant donc la suite naturelle et comme le prolongement de notre *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces*, nous lui emprunterons avec les *notations* (*) et les

---

(*) Pour le cas où le lecteur n'aurait pas ce travail à sa disposition, et afin de permettre néanmoins l'intelligence du présent mémoire, nous rappelons que nous faisons usage pour les *dérivées partielles* relatives aux variables $x$, $y$, $z$, d'une notation abrégée qui consiste à supprimer partout, haut et bas, dans les symboles ordinaires de ces dérivées, la caractéristique $d$, mais en laissant subsister l'exposant dont elle est affectée, en sorte que, quelle que soit la quantité $\varphi$, les symboles

$$\frac{\varphi}{x}, \frac{\varphi}{y}, \frac{\varphi}{z}, \quad \frac{\varphi^2}{x^2}, \frac{\varphi^2}{y^2}, \cdots \frac{\varphi^2}{yz}, \cdots \quad \frac{\varphi^3}{x^3}, \cdots \frac{\varphi^3}{xy^2}, \cdots \frac{\varphi^3}{xyz}, \cdots$$

représenterons pour nous respectivement les dérivées

$$\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \frac{d^2\varphi}{dy^2}, \cdots \frac{d^2\varphi}{dydz}, \cdots \quad \frac{d^3\varphi}{dx^3}, \cdots \frac{d^3\varphi}{dxdy^2} \quad \frac{d^3\varphi}{dxdydz},$$

tandis que nous aurons soin de dénoter par

$$\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2, \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2, \cdots \frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}, \cdots \quad \left(\frac{\varphi}{x}\right)^3 \cdots \frac{\varphi}{x}\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2, \cdots \frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}$$

les puissances ou produits

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2, \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2, \cdots \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{dz}, \cdots \quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^3, \cdots \frac{d\varphi}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2, \cdots \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{dz}, \cdots$$

Nous prévenons également que nous ferons un usage très fréquent de la notation des

Digitized by Google

conventions originaires, les résultats et les formules qui nous serviront aujourd'hui de point de départ. Nous demanderons en conséquence expressément au lecteur de vouloir bien s'y reporter, principalement au paragraphe IV de ce mémoire, qui a rapport aux propriétés du système triple orthogonal.

---

*paramètres différentiels des premier et second ordre* de Lamé, c'est-à-dire des symboles

$$\Delta_1\varphi = \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}, \quad \Delta_2\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2},$$

le radical du premier étant toujours supposé *essentiellement positif*.

Digitized by Google

# I

**Équations du mouvement d'un point matériel en coordonnées curvilignes. — Formes signalées par Lamé. — Formes nouvelles. — Rayon de courbure d'une courbe donnée en coordonnées curvilignes.**

But et objet de ce chapitre. — Toutes les fois que dans l'étude du mouvement d'un point matériel ce point est assujetti à rester sur une certaine surface fixe, il y aura évidemment avantage, si cela est possible, à prendre un système de coordonnées telles que cette surface puisse être considérée comme une surface individuelle de l'une des familles qui composent ce système, parce qu'alors l'une des coordonnées du point devant conserver ainsi une valeur constante et connue à l'avance, on n'aura plus que deux coordonnées au lieu de trois à déterminer en fonction du temps. C'est ainsi que, si l'on considère le mouvement d'un point matériel astreint à rester sur un cylindre de révolution, il faudra évidemment prendre des coordonnées semi-polaires ou cylindriques, parce qu'alors la coordonnée $r$ conservant une valeur constante, on n'aura plus à déterminer que la hauteur $z$ et l'azimut $\theta$, qui sont *a priori* les inconnues naturelles de la question. De même dans le cas d'un point pesant assujetti à demeurer sur une sphère, la distance $r$ à l'origine étant fixe et donnée, les inconnues naturelles de la question sont l'azimut $\psi$ et l'angle d'écart $\theta$ du rayon vecteur avec la verticale, qui déterminent la direction de ce rayon, et le système des coordonnées sphériques ou polaires se trouve pour ainsi dire imposé de lui-même à l'avance par la nature de la question; car on ne sort pas au fond de ce système, en prenant, comme on le fait dans les formules classiques relatives au problème du pendule conique, au lieu de l'angle $\theta$, son cosinus que l'on appelle $z$, et il en serait de même dans tout autre cas analogue.

Mais les équations du mouvement, telles qu'on les considère

Digitized by Google

habituellement, étant exprimées en coordonnées rectilignes, cette simplification ultérieure dans l'intégration exige au début du calcul un changement de variables, c'est-à-dire en fait l'élimination des neuf quantités

$$x, y, z, \quad \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2},$$

entre les équations différentielles du mouvement, l'équation de la surface donnée, les formules de transformation de coordonnées, et les deux premières équations qu'on en tirera par la différentiation.

C'est précisément cette élimination préalable que l'on devra opérer dans chaque cas particulier, et qui, énoncée dans ces termes généraux, ne manque pas d'une certaine complication, que nous nous proposons de donner le moyen d'éviter, en présentant à l'avance et une fois pour toutes le résultat de cette opération pour un système de coordonnées curvilignes quelconque. — En d'autres termes, nous voulons former le système d'équations différentielles du second ordre, entre les inconnues $\varphi$, $\psi$ et $\varpi$, qui par l'intégration fournirait directement la valeur de ces coordonnées en fonction du temps, en effectuant l'élimination des neuf quantités que nous venons d'énumérer, entre les trois équations différentielles du mouvement, les trois équations des surfaces coordonnées et celles qui en proviendraient par la différentiation (*).

(*) Nous résoudrons tout d'abord la question ainsi posée, en nous servant pour cet objet, à l'exemple de LAMÉ et de GUIRAUDET (qui les a produites le premier), des formules relatives à la courbure du système orthogonal, que nous avons établies dans notre *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces*; mais le lecteur trouvera un peu plus loin une exposition de la même question indépendante de ces formules, qui aura le mérite de ne supposer en aucune façon l'existence d'un système triple orthogonal, avantage précieux qui permettra de faire usage dans tous les cas de cette théorie, pour la détermination du mouvement d'un point sur une surface donnée.



Digitized by Google

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT EN FONCTION DES VITESSES. — Le but que nous avons en vue étant ainsi nettement formulé, soient donc $u$, $v$, $w$ les trois composantes de la vitesse du point matériel suivant les normales aux trois surfaces coordonnées $\varphi$, $\psi$ et $\varpi$, et U, V, W les trois composantes, suivant les mêmes directions, de la force extérieure qui le sollicite, rapportées à l'unité de masse, ses composantes suivant les axes de coordonnées rectilignes étant toujours désignées par X, Y, Z. Nous aurons à la fois, en projetant d'une part la vitesse successivement sur ces trois axes coordonnés, puis d'autre part la force sur les trois normales précitées,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda u + \lambda' v + \lambda'' w, & \mathrm{U} &= \lambda \mathrm{X} + \mu \mathrm{Y} + \nu \mathrm{Z}, \\ \frac{dy}{dt} &= \mu u + \mu' v + \mu'' w, & \mathrm{V} &= \lambda' \mathrm{X} + \mu' \mathrm{Y} + \nu' \mathrm{Z}, \\ \frac{dz}{dt} &= \nu u + \nu' v + \nu'' w, & \mathrm{W} &= \lambda'' \mathrm{X} + \mu'' \mathrm{Y} + \nu'' \mathrm{Z}, \end{aligned}\right.$$

$\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$, $\lambda''$, $\mu''$, $\nu''$ désignant toujours les neuf cosinus directeurs des trois normales aux surfaces $\varphi$, $\psi$ et $\varpi$.

Les équations du mouvement du même point étant en coordonnées rectilignes

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{Z},$$

les trois équations de droite précédentes deviendront d'une part

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{U} &= \lambda \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{d^2y}{dt^2} + \nu \frac{d^2z}{dt^2}, \\ \mathrm{V} &= \lambda' \frac{d^2x}{dt^2} + \mu' \frac{d^2y}{dt^2} + \nu' \frac{d^2z}{dt^2}, \\ \mathrm{W} &= \lambda'' \frac{d^2x}{dt^2} + \mu'' \frac{d^2y}{dt^2} + \nu'' \frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

tandis que les trois équations de gauche étant différentiées donneront d'autre part

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \lambda\frac{du}{dt} + \lambda'\frac{dv}{dt} + \lambda''\frac{dw}{dt} + u\frac{d\lambda}{dt} + v\frac{d\lambda'}{dt} + w\frac{d\lambda''}{dt},\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \mu\frac{du}{dt} + \mu'\frac{dv}{dt} + \mu''\frac{dw}{dt} + u\frac{d\mu}{dt} + v\frac{d\mu'}{dt} + w\frac{d\mu''}{dt},\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \nu\frac{du}{dt} + \nu'\frac{dv}{dt} + \nu''\frac{dw}{dt} + u\frac{d\nu}{dt} + v\frac{d\nu'}{dt} + w\frac{d\nu''}{dt};
\end{aligned}\right.$$

en sorte que si l'on substitue ces valeurs des dérivées secondes dans les équations immédiatement précédentes, celles-ci deviendront, en ayant égard aux formules (42) de notre *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces* (p. 49), c'est-à-dire aux relations connues entre les neuf cosinus directeurs de trois droites rectangulaires :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{U} &= \frac{du}{dt} + v\left(\lambda\frac{d\lambda'}{dt} + \mu\frac{d\mu'}{dt} + \nu\frac{d\nu'}{dt}\right) + w\left(\lambda\frac{d\lambda''}{dt} + \mu\frac{d\mu''}{dt} + \nu\frac{d\nu''}{dt}\right)\\
\mathrm{V} &= \frac{dv}{dt} + w\left(\lambda'\frac{d\lambda''}{dt} + \mu'\frac{d\mu''}{dt} + \nu'\frac{d\nu''}{dt}\right) + u\left(\lambda'\frac{d\lambda}{dt} + \mu'\frac{d\mu}{dt} + \nu'\frac{d\nu}{dt}\right)\\
\mathrm{W} &= \frac{dw}{dt} + u\left(\lambda''\frac{d\lambda}{dt} + \mu''\frac{d\mu}{dt} + \nu''\frac{d\nu}{dt}\right) + v\left(\lambda''\frac{d\lambda'}{dt} + \mu''\frac{d\mu'}{dt} + \nu''\frac{d\nu'}{dt}\right).
\end{aligned}\right.$$

Cela posé, il nous sera facile d'obtenir l'expression des dérivées relatives au temps des neuf cosinus qui figurent dans ces équations, en fonction des dérivées de $\varphi$, $\psi$ et $\varpi$, car ayant pour l'un d'eux par exemple

$$(2)\qquad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\lambda}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\lambda}{\psi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{\lambda}{\varpi}\frac{d\varpi}{dt},$$

le tableau (63) de notre *Mémoire* (p. 76) nous fournit immédiatement la valeur de leurs vingt-sept dérivées partielles, relatives aux coordonnées curvilignes, exprimées en fonction de ces cosinus eux-mêmes, et des six courbures principales du système que l'on peut supposer remplacées par leurs valeurs (59). Mais aupa-

Digitized by Google

ravant nous observerons qu'en vertu de la formule (40$^{bis}$) (p. 44) du même travail, si l'on désigne par $dn$, $dn'$, $dn''$ les éléments des trois normales aux surfaces coordonnées, on aura

$$(3)\quad u = \frac{dn}{dt} = \frac{1}{\Delta_1 \varphi}\frac{d\varphi}{dt}, \quad v = \frac{dn'}{dt} = \frac{1}{\Delta_1 \varphi}\frac{d\psi}{dt}, \quad w = \frac{1}{\Delta_1 \varpi}\frac{d\varpi}{dt},$$

d'où l'on tirera :

$$(4)\qquad \frac{d\varphi}{dt} = \Delta_1 \varphi \,.\, u, \qquad \frac{d\psi}{dt} = \Delta_1 \psi \,.\, v, \qquad \frac{d\varpi}{dt} = \Delta_1 \varpi \,.\, w.$$

Or, si nous reportons ces valeurs dans l'expression (2), ce qui la transformera dans la suivante

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\lambda}{\varphi}\Delta_1 \varphi \,.\, u + \frac{\lambda}{\psi}\Delta_1 \psi \,.\, v + \frac{\lambda}{\varpi}\Delta_1 \varpi \,.\, w,$$

puis que nous remplacions les coefficients de $u$, $v$, $w$ par leurs valeurs tirées du tableau (63) du *Mémoire* précité, nous obtiendrons la première des trois expressions suivantes

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\lambda}{dt} &= -\left(\frac{\lambda''}{R_1''} + \frac{\lambda'}{R_2'}\right)u + \frac{\lambda'}{R_1}v + \frac{\lambda''}{R_2}w,\\
\frac{d\mu}{dt} &= -\left(\frac{\mu''}{R_1''} + \frac{\mu'}{R_2'}\right)u + \frac{\mu'}{R_1}v + \frac{\mu''}{R_2}w,\\
\frac{d\nu}{dt} &= -\left(\frac{\nu''}{R_1''} + \frac{\nu'}{R_2'}\right)u + \frac{\nu'}{R_1}v + \frac{\nu''}{R_2}w,
\end{aligned}\right.$$

les deux autres résultant de la permutation circulaire des trois axes de coordonnées rectilignes, laquelle revient à permuter simplement entre elles les trois lettres $\lambda$, $\mu$, $\nu$, sans modifier leur accentuation.

De ce premier groupe nous conclurons immédiatement deux autres qui s'en déduiront par la permutation des trois surfaces coordonnées, ou ce qui est la même chose des trois normales, opération qui revient dans le cas actuel à permuter les trois

Digitized by Google

lettres $u$, $v$, $w$, et simplement les accentuations des autres lettres, savoir :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\lambda'}{dt} &= -\left(\frac{\lambda}{R_1} + \frac{\lambda''}{R_2''}\right)v + \frac{\lambda''}{R_1'}w + \frac{\lambda}{R_2'}u,\\
\frac{d\mu'}{dt} &= -\left(\frac{\mu}{R_1} + \frac{\mu''}{R_2''}\right)v + \frac{\mu''}{R_1'}w + \frac{\mu}{R_2'}u,\\
\frac{d\nu'}{dt} &= -\left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{\nu''}{R_2''}\right)v + \frac{\nu''}{R_1'}w + \frac{\nu}{R_2'}u.
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\lambda''}{dt} &= -\left(\frac{\lambda'}{R_1'} + \frac{\lambda}{R_2}\right)w + \frac{\lambda}{R_1''}u + \frac{\lambda'}{R_2''}v,\\
\frac{d\mu''}{dt} &= -\left(\frac{\mu'}{R_1'} + \frac{\mu}{R_2}\right)w + \frac{\mu}{R_1''}u + \frac{\mu'}{R_2''}v,\\
\frac{d\nu''}{dt} &= -\left(\frac{\nu'}{R_1'} + \frac{\nu}{R_2}\right)w + \frac{\nu}{R_1''}u + \frac{\nu'}{R_2''}v.
\end{aligned}\right.$$

Nous conclurons dès lors de ces valeurs, en ayant égard aux mêmes équations (42) déjà citées,

$$\left\{\begin{aligned}
\lambda'\frac{d\lambda''}{dt} + \mu'\frac{d\mu''}{dt} + \nu'\frac{d\nu''}{dt} &= -\left(\lambda''\frac{d\lambda'}{dt} + \mu''\frac{d\mu'}{dt} + \nu''\frac{d\nu'}{dt}\right) = \frac{v}{R_2''} - \frac{w}{R_1'},\\
\lambda''\frac{d\lambda}{dt} + \mu''\frac{d\mu}{dt} + \nu''\frac{d\nu}{dt} &= -\left(\lambda\frac{d\lambda''}{dt} + \mu\frac{d\mu''}{dt} + \nu\frac{d\nu''}{dt}\right) = \frac{w}{R_2} - \frac{u}{R_1''},\\
\lambda\frac{d\lambda'}{dt} + \mu\frac{d\mu'}{dt} + \nu\frac{d\nu'}{dt} &= -\left(\lambda'\frac{d\lambda}{dt} + \mu'\frac{d\mu}{dt} + \nu'\frac{d\nu}{dt}\right) = \frac{u}{R_2'} - \frac{v}{R_1};
\end{aligned}\right.$$

et en reportant ces dernières expressions dans les équations (1)

$$\left\{\begin{aligned}
U &= \frac{du}{dt} + v\left(\frac{u}{R_2'} - \frac{v}{R_1}\right) + w\left(\frac{u}{R_1''} - \frac{w}{R_2}\right),\\
V &= \frac{dv}{dt} + w\left(\frac{v}{R_2''} - \frac{w}{R_1'}\right) + u\left(\frac{v}{R_1} - \frac{u}{R_2'}\right),\\
W &= \frac{dw}{dt} + u\left(\frac{w}{R_2} - \frac{u}{R_1''}\right) + v\left(\frac{w}{R_1'} - \frac{v}{R_2''}\right),
\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

ou encore en intervertissant les deux membres :

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + u\left(\dfrac{v}{R_2'} + \dfrac{w}{R_1''}\right) - \dfrac{v^2}{R_1} - \dfrac{w^2}{R_2} = U, \\ \dfrac{dv}{dt} + v\left(\dfrac{w}{R_2''} + \dfrac{u}{R_1}\right) - \dfrac{w^2}{R_1'} - \dfrac{u^2}{R_2'} = V, \\ \dfrac{dw}{dt} + w\left(\dfrac{u}{R_2} + \dfrac{v}{R_1'}\right) - \dfrac{u^2}{R_1''} - \dfrac{v^2}{R_2''} = W. \end{cases}$$

C'est la troisième forme donnée par Lamé aux équations du mouvement, et présentée par lui au § XC de ses *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (p. 165).

Nous n'adopterons pas cette forme qui se présente ainsi à nous la première, à cause de son défaut absolu de symétrie, mais nous la transformerons de manière à en déduire une seconde qui se rapproche beaucoup plus d'une autre forme notablement plus élégante également donnée par Lamé, quelques pages auparavant. Pour effectuer cette transformation sur la première équation, par exemple, il suffira de développer la dérivée de la vitesse qui figure dans le premier membre de la façon suivante :

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\Delta_1\rho \cdot \frac{u}{\Delta_1\rho}\right) = \Delta_1\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{u}{\Delta_1\rho}\right) + \frac{u}{\Delta_1\rho}\frac{d\Delta_1\rho}{dt}$$
$$= \Delta_1\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{u}{\Delta_1\rho}\right) + u\frac{d.l\Delta_1\rho}{dt}.$$

Or, comme nous avons, en vertu des valeurs (4),

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d.l\Delta_1\rho}{dt} = \dfrac{l\Delta_1\rho}{\rho}\dfrac{d\rho}{dt} + \dfrac{l\Delta_1\rho}{\psi}\dfrac{d\psi}{dt} + \dfrac{l\Delta_1\rho}{\varpi}\dfrac{d\varpi}{dt} \\ \qquad = \Delta_1\rho \dfrac{l\Delta_1\rho}{\rho}.u + \Delta_1\psi \dfrac{l\Delta_1\rho}{\psi}.v + \Delta_1\varpi \dfrac{l\Delta_1\rho}{\varpi}.w, \end{cases}$$

nous aurons en reportant cette expression dans la précédente :

$$\frac{du}{dt} = \Delta_1\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{u}{\Delta_1\rho}\right) + u\left(\Delta_1\rho \frac{l\Delta_1\rho}{\rho}u + \Delta_1\psi \frac{l\Delta_1\rho}{\psi}v + \Delta_1\varpi \frac{l\Delta_1\rho}{\varpi}w\right)$$

Digitized by Google

Si maintenant nous substituons à son tour cette dernière expression dans la première équation (5), et que nous y remettions en même temps à la place des rayons de courbure qui y figurent leurs valeurs fournies par le tableau (59) de notre *Mémoire* (p. 70), elle deviendra par ces substitutions

$$\Delta_1\varphi\,\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{\Delta_1\varphi}\right)+u\left(\Delta_1\varphi\,\frac{l\Delta_1\varphi}{\varphi}\,u+\Delta_1\psi\,\frac{l\Delta_1\varphi}{\psi}\,v+\Delta_1\varpi\,\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}\,w\right)$$
$$+u\left(-\Delta_1\psi\,\frac{l\Delta_1\varphi}{\psi}\,v-\Delta_1\varpi\,\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}\,w\right)+\Delta_1\varphi\,\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\,v^2+\Delta_1\varphi\,\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}\,w^2=\mathrm{U},$$

et, par conséquent, en réduisant et divisant tous les termes par le facteur $\Delta_1\varphi$, nous aurons définitivement la première des trois équations suivantes

$$(7)\quad\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{u}{\Delta_1\varphi}\right)+\dfrac{l\Delta_1\varphi}{\varphi}\,u^2+\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\,v^2+\dfrac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}\,w^2=\dfrac{\mathrm{U}}{\Delta_1\varphi},\\[2ex]\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v}{\Delta_1\psi}\right)+\dfrac{l\Delta_1\varphi}{\psi}\,u^2+\dfrac{l\Delta_1\psi}{\psi}\,v^2+\dfrac{l\Delta_1\varpi}{\psi}\,w^2=\dfrac{\mathrm{V}}{\Delta_1\psi},\\[2ex]\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{w}{\Delta_1\varpi}\right)+\dfrac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}\,u^2+\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\,v^2+\dfrac{l\Delta_1\varpi}{\varpi}\,w^2=\dfrac{\mathrm{W}}{\Delta_1\varpi},\end{cases}$$

les deux autres se déduisant de la première (sauf interversion des termes) par la simple permutation des trois surfaces coordonnées, puisque les trois équations (5), ainsi que les différentes formules dont nous avons fait usage pour les transformer, se déduisent elles-mêmes suivant cette loi.

Telle est la forme simple et élégante, que nous proposerons d'adopter dans le cas le plus général, pour les équations du mouvement d'un point matériel en coordonnées curvilignes, exprimées en fonction des vitesses et de leurs dérivées par rapport au temps, de préférence à toute autre à cause de sa parfaite symétrie, qui la rend assez facile à retenir. Mais nous croyons néanmoins devoir faire connaître encore les deux autres formes que Lamé donne aussi à ces mêmes équations, et qui peuvent se déduire également assez facilement des deux formes précédentes.

Digitized by Google

Tout d'abord nous développerons de nouveau la dérivée $\frac{du}{dt}$, d'après la valeur (3) de $u$, ainsi qu'il suit

$$du = \frac{d}{dt}\left(\Delta_1^{-1}\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right) = \Delta_1^{-1}\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\Delta_1^{-1}\varphi}{dt}$$

$$= \Delta_1^{-1}\varphi \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{d\varphi}{dt} \cdot \Delta_1^{-1}\varphi \frac{dl\Delta_1\varphi}{dt},$$

et par conséquent, en ayant égard à la même valeur de $u$ et à l'expression (6),

$$\frac{du}{dt} = \Delta_1^{-1}\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} - u\left(\Delta_1\varphi \frac{l\Delta_1\varphi}{\varphi} u + \Delta_1\psi \frac{l\Delta_1\varphi}{\psi} v + \Delta_1\varpi \frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi} w\right),$$

expression que nous pourrons encore écrire, si nous supposons les trois surfaces coordonnées isothermes, ce qui est le cas le plus fréquemment considéré, en vertu des formules (79), (71) et (59) de notre *Mémoire* :

$$\frac{du}{dt} = \Delta_1^{-1}\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} + u\left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u + \frac{1}{R_2'}v + \frac{1}{R_1''}w\right].$$

Dès lors, en reportant cette valeur dans la première des équations (5), elle deviendra

$$\frac{1}{\Delta_1\varphi}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + u\left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u + \frac{1}{R_2'}v + \frac{1}{R_1''}w\right] + u\left(\frac{v}{R_2'} + \frac{w}{R_1''}\right) - \frac{v^2}{R_1} - \frac{w^2}{R_2} = U,$$

et en ordonnant, nous aurons définitivement la première des trois suivantes

$$(7^{bis})\begin{cases} \frac{1}{\Delta_1\varphi}\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u^2 + \frac{v^2}{R_1} + \frac{w^2}{R_2}\right] + 2u\left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u + \frac{v}{R_2'} + \frac{w}{R_1''}\right] = U, \\ \frac{1}{\Delta_1\psi}\frac{d^2\psi}{dt^2} - \left[\left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}\right)v^2 + \frac{w^2}{R_1'} + \frac{u^2}{R_2'}\right] + 2v\left[\left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}\right)v + \frac{w}{R_2''} + \frac{u}{R_1}\right] = V, \\ \frac{1}{\Delta_1\varpi}\frac{d^2\varpi}{dt^2} - \left[\left(\frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2''}\right)w^2 + \frac{u^2}{R_1''} + \frac{v^2}{R_2''}\right] + 2w\left[\left(\frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2''}\right)w + \frac{u}{R_2} + \frac{v}{R_1'}\right] = W, \end{cases}$$

Digitized by Google

qui ne sont, sauf interversion des termes et introduction pour la symétrie d'un terme ajouté et retranché à chaque équation, autre chose que la première forme des équations de Lamé, c'est-à-dire les équations (6) du § LXXIX des *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (p. 145).

Si, enfin, dans la même hypothèse des trois surfaces coordonnées isothermes, nous multiplions les trois équations (7) respectivement par $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, puis que nous remplacions dès lors les coefficients des carrés des vitesses par leurs valeurs tirées des formules (79), (71) et (59) du *Mémoire* (pp. 90, 83, et 70), elles se transformeront immédiatement dans les suivantes :

$$(7^{\text{ter}}) \quad \begin{cases} \Delta_1\varphi \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{u}{\Delta_1\varphi}\right) - \left[\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)u^2 + \dfrac{1}{R_1}v^2 + \dfrac{1}{R_2}w^2\right] = U, \\ \Delta_1\psi \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v}{\Delta_1\psi}\right) - \left[\left(\dfrac{1}{R_1'} + \dfrac{1}{R_2'}\right)v^2 + \dfrac{1}{R_1'}w^2 + \dfrac{1}{R_2'}u^2\right] = V, \\ \Delta_1\varpi \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{w}{\Delta_1\varpi}\right) - \left[\left(\dfrac{1}{R_1''} + \dfrac{1}{R_2''}\right)w^2 + \dfrac{1}{R_1''}u^2 + \dfrac{1}{R_2''}v^2\right] = W, \end{cases}$$

qui sont de même, sauf interversion des termes, celles que Lamé présente comme seconde forme, sous le numéro (19), au § LXXXIX de l'ouvrage déjà cité (p. 162).

Équations du mouvement en fonction des coordonnées elles-mêmes. — Mais replaçons-nous de nouveau dans le cas le plus général, c'est-à-dire ne supposons plus que les surfaces coordonnées appartiennent toutes trois à la catégorie des surfaces isothermes, et poussons maintenant jusqu'au bout la solution de la question que nous avons entreprise.

En effet, bien que les équations (7) que nous avons présentées nous paraissent préférables à celles de Lamé, principalement au point de vue mnémonique, elles ne remplissent pas encore complètement le but que nous nous étions proposé, à savoir de former trois équations différentielles du second ordre entre les trois inconnues $\varphi, \psi, \varpi$ seulement, et le temps comme variable



Digitized by Google

indépendante. Il reste donc encore, pour achever la solution, à remplacer dans ces équations $u$, $v$, $w$ par leurs valeurs (3), et à développer ensuite les trois dérivées qui figurent dans leurs premiers membres. Celle de ces dérivées qui entre dans la première équation se développera ainsi de la façon suivante, eu égard à la valeur (3) de $u$ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{\Delta_1\varphi}\right) = \frac{d}{dt}\left(\Delta_1^{-2}\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right) = \Delta_1^{-2}\varphi \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt}\frac{d \cdot \Delta_1^{-2}\varphi}{dt}$$

$$= \Delta_1^{-2}\varphi \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{\Delta_1^{-2}\varphi}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\Delta_1^{-2}\varphi}{\psi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{\Delta_1^{-2}\varphi}{\varpi} \cdot \frac{d\varpi}{dt}\right).$$

D'autre part les termes, qui contiennent les carrés des vitesses dans la même équation, peuvent eux-mêmes être transformés par la substitution des valeurs (3) de la façon suivante

$$\frac{l\Delta_1\varphi}{\varphi}u^2 + \frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}v^2 + \frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}w^2 = \Delta_1^{-2}\varphi\frac{l\Delta_1\varphi}{\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \Delta_1^{-2}\psi\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \Delta_1^{-2}\varpi\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)^2$$

$$= \Delta_1^{-2}\varphi\frac{\Delta_1\varphi}{\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \Delta_1^{-2}\psi\frac{\Delta_1\psi}{\varphi}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \Delta_1^{-2}\varpi\frac{\Delta_1\varpi}{\varphi}\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_1^{-2}\varphi}{\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{\Delta_1^{-2}\psi}{\varphi}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{\Delta_1^{-2}\varpi}{\varphi}\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)^2\right];$$

en sorte que, par la substitution de ces deux dernières expressions, la première équation (7) se transformera définitivement dans celle-ci :

$$\Delta_1^{-2} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{\Delta_1^{-2}\varphi}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\Delta_1^{-2}\varphi}{\varphi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{\Delta_1^{-2}\varphi}{\varpi}\frac{d\varpi}{dt}\right)$$

$$- \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_1^{-2}\varphi}{\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{\Delta_1^{-2}\psi}{\varphi}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{\Delta_1^{-2}\varpi}{\varphi}\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)^2\right] = \frac{U}{\Delta_1\varphi}.$$

Pour écrire ces trois équations, nous poserons donc, en vue seulement de simplifier l'écriture,

$$(8) \qquad H = \Delta_1^{-2}\varphi, \quad K = \Delta_1^{-2}\psi, \quad J = \Delta_1^{-2}\varpi,$$

Digitized by Google

et avec ces notations, les équations différentielles du mouvement d'un point sous leur forme définitive seront les suivantes :

$$(9)\quad \begin{cases} \mathrm{H}\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}+\dfrac{d\varphi}{dt}\left(\dfrac{\mathrm{H}}{\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt}+\dfrac{\mathrm{H}}{\psi}\dfrac{d\psi}{dt}+\dfrac{\mathrm{H}}{\varpi}\dfrac{d\varpi}{dt}\right)-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\mathrm{H}}{\varphi}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2+\dfrac{\mathrm{K}}{\varphi}\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2+\dfrac{\mathrm{J}}{\varphi}\left(\dfrac{d\varpi}{dt}\right)^2\right]=\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}.\mathrm{U}, \\ \mathrm{K}\dfrac{d^2\psi}{dt^2}+\dfrac{d\psi}{dt}\left(\dfrac{\mathrm{K}}{\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt}+\dfrac{\mathrm{K}}{\psi}\dfrac{d\psi}{dt}+\dfrac{\mathrm{K}}{\varpi}\dfrac{d\varpi}{dt}\right)-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\mathrm{H}}{\psi}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2+\dfrac{\mathrm{K}}{\psi}\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2+\dfrac{\mathrm{J}}{\psi}\left(\dfrac{d\varpi}{dt}\right)^2\right]=\mathrm{K}^{\frac{1}{2}}.\mathrm{V}, \\ \mathrm{J}\dfrac{d^2\varpi}{dt^2}+\dfrac{d\varpi}{dt}\left(\dfrac{\mathrm{J}}{\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt}+\dfrac{\mathrm{J}}{\psi}\dfrac{d\psi}{dt}+\dfrac{\mathrm{J}}{\varpi}\dfrac{d\varpi}{dt}\right)-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\mathrm{H}}{\varpi}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2+\dfrac{\mathrm{K}}{\varpi}\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2+\dfrac{\mathrm{J}}{\varpi}\left(\dfrac{d\varpi}{dt}\right)^2\right]=\mathrm{J}^{\frac{1}{2}}.\mathrm{W}. \end{cases}$$

Telle est la forme d'équations du mouvement que nous proposerons donc de substituer aux différentes équations de Lamé, que nous venons successivement de passer en revue ; la question importante que nous allons traiter dans le paragraphe suivant suffira à montrer combien cette forme est d'un emploi facile et se prête commodément aux applications qu'on en veut faire. Mais auparavant, à titre de vérifications des calculs qui précèdent, nous allons nous proposer de retrouver par le moyen de ces équations l'intégrale des forces vives.

Pour cela il suffira de multiplier respectivement ces trois équations par $d\varphi$, $d\psi$, $d\varpi$ et d'ajouter, en remarquant que les premières parenthèses de chaque équation sont respectivement les dérivées totales $\frac{d\mathrm{H}}{dt}$, $\frac{d\mathrm{K}}{dt}$, $\frac{d\mathrm{J}}{dt}$, et réunissant par colonnes verticales les termes contenus dans les secondes parenthèses, car l'on obtiendra en opérant ainsi

$$\left[\mathrm{H}\frac{d\varphi}{dt}\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\frac{d\mathrm{H}}{dt}\right]dt+\left[\mathrm{K}\frac{d\psi}{dt}\frac{d^2\psi}{dt^2}+\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\frac{d\mathrm{K}}{dt}\right]dt+\left[\mathrm{J}\frac{d\varpi}{dt}\frac{d^2\varpi}{dt^2}+\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)^2\frac{d\mathrm{J}}{dt}\right]dt$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\frac{d\mathrm{H}}{dt}dt-\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\frac{d\mathrm{K}}{dt}dt-\frac{1}{2}\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)^2\frac{d\mathrm{J}}{dt}dt=\mathrm{U}\frac{d\varphi}{\Delta_1\varphi}+\mathrm{V}\frac{d\psi}{\Delta_1\psi}+\mathrm{W}\frac{d\varpi}{\Delta_1\varpi},$$

c'est-à-dire simplement en réduisant :

$$(10)\quad \left[\mathrm{H}\frac{d\varphi}{dt}\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\frac{d\mathrm{H}}{dt}+\mathrm{K}\frac{d\psi}{dt}\frac{d^2\psi}{dt^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\frac{d\mathrm{K}}{dt}+\mathrm{J}\frac{d\varpi}{dt}\frac{d^2\varpi}{dt^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)^2\frac{d\mathrm{J}}{dt}\right]dt=\mathrm{U}dn+\mathrm{V}dn'+\mathrm{W}dn''.$$

Digitized by Google

Or le second membre représente évidemment, d'après les théorèmes connus de la Mécanique, le travail élémentaire de la force qui sollicite le point, travail qui aurait pour expression en coordonnées planes

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{X}dy + \mathrm{Z}dz = d\mathrm{F}(x, y, z),$$

en admettant qu'il existe une fonction des forces. Si l'on imagine ce même travail élémentaire exprimé en coordonnées quelconques, on aura donc de même

$$(10^{bis}) \qquad \mathrm{U}dn + \mathrm{V}dn' + \mathrm{W}dn'' = d\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi),$$

la fonction $\mathcal{F}$ procédant de la fonction F par la simple substitution à la place des variables $x$, $y$, $z$ de leurs valeurs données en $\varphi$, $\psi$ et $\varpi$. Dans ces conditions les deux membres de l'équation (10) sont bien ainsi des différentielles exactes, et l'on a en intégrant

$$(11) \qquad \frac{1}{2}\left[\mathrm{H}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \mathrm{K}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \mathrm{J}\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)^2\right] = \mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + \mathrm{C},$$

équation dont le premier membre peut s'écrire successivement, eu égard aux définitions (8) des symboles H, K, J et aux valeurs (3)

$$\frac{1}{2}\left[\mathrm{H}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \mathrm{K}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \mathrm{J}\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{2dt^2}\left[\left(\frac{d\varphi}{\Delta_1\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{\Delta_1\psi}\right)^2 + \left(\frac{d\varpi}{\Delta_1\varpi}\right)^2\right] = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2),$$

ce qui donne bien, en reportant cette valeur et supposant la constante C déterminée par l'état initial, l'équation connue des forces vives

$$(12) \qquad \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + \mathrm{C},$$

car tel est bien le résultat auquel on fût arrivé en calculant d'abord cette intégrale en coordonnées rectilignes, et la transformant ensuite en coordonnées quelconques.

Digitized by Google

AUTRE PROCÉDÉ DIRECT POUR ÉTABLIR LES MÊMES ÉQUATIONS. — Nous avons cru devoir, avant d'établir la forme d'équation précédente que nous proposons d'adopter pour les équations du mouvement, et dans le but d'exposer loyalement l'état de la question, faire connaître les différentes formes que Lamé leur avait antérieurement données, et la moitié du chemin se trouvant ainsi faite, partir de celles-là pour arriver dès lors rapidement à celles qui nous appartiennent en propre. Mais nous eussions pu tout aussi facilement établir directement celles-ci, sans passer par aucune des équations de Lamé, et cette voie nous eût permis d'obtenir du même coup deux autres formules importantes, qui ne se trouvent pas dans Lamé, à savoir celles qui font connaître la grandeur et la direction du rayon de courbure d'une courbe quelconque, dont l'équation est supposée donnée en coordonnées curvilignes.

A cet effet, rappelons d'abord quelques formules que l'on trouve dans tous les traités d'analyse, relativement au système orthogonal considéré; savoir, en premier lieu, celles-ci :

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{x}{\varphi}=\mathrm{H}\dfrac{\varphi}{x}, & \dfrac{y}{\varphi}=\mathrm{H}\dfrac{\varphi}{y}, & \dfrac{z}{\varphi}=\mathrm{H}\dfrac{\varphi}{z}, \\ \dfrac{x}{\psi}=\mathrm{K}\dfrac{\psi}{x}, & \dfrac{y}{\psi}=\mathrm{K}\dfrac{\psi}{y}, & \dfrac{z}{\psi}=\mathrm{K}\dfrac{\psi}{z}, \\ \dfrac{x}{\varpi}=\mathrm{J}\dfrac{\varpi}{x}, & \dfrac{y}{\varpi}=\mathrm{J}\dfrac{\varpi}{y}, & \dfrac{z}{\varpi}=\mathrm{J}\dfrac{\varpi}{z}, \end{array}\right.$$

qui résultent immédiatement des neuf relations

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{x}{\varphi}\dfrac{\varphi}{x}+\dfrac{x}{\psi}\dfrac{\psi}{x}+\dfrac{x}{\varpi}\dfrac{\varpi}{x}=1, & \dfrac{y}{\varphi}\dfrac{\varphi}{x}+\dfrac{y}{\psi}\dfrac{\psi}{x}+\dfrac{y}{\varpi}\dfrac{\varpi}{x}=0, & \dfrac{z}{\varphi}\dfrac{\varphi}{x}+\dfrac{z}{\psi}\dfrac{\psi}{x}+\dfrac{z}{\varpi}\dfrac{\varpi}{x}=0, \\ \dfrac{x}{\varphi}\dfrac{\varphi}{y}+\dfrac{x}{\psi}\dfrac{\psi}{y}+\dfrac{x}{\varpi}\dfrac{\varpi}{y}=0, & \dfrac{y}{\varphi}\dfrac{\varphi}{y}+\dfrac{y}{\psi}\dfrac{\psi}{y}+\dfrac{y}{\varpi}\dfrac{\varpi}{y}=1, & \dfrac{z}{\varphi}\dfrac{\varphi}{y}+\dfrac{z}{\psi}\dfrac{\psi}{y}+\dfrac{z}{\varpi}\dfrac{\varpi}{y}=0, \\ \dfrac{x}{\varphi}\dfrac{\varphi}{z}+\dfrac{x}{\psi}\dfrac{\psi}{z}+\dfrac{x}{\varpi}\dfrac{\varpi}{z}=0, & \dfrac{y}{\varphi}\dfrac{\varphi}{z}+\dfrac{y}{\psi}\dfrac{\psi}{z}+\dfrac{y}{\varpi}\dfrac{\varpi}{z}=0, & \dfrac{z}{\varphi}\dfrac{\varphi}{z}+\dfrac{z}{\psi}\dfrac{\psi}{z}+\dfrac{z}{\varpi}\dfrac{\varpi}{z}=1, \end{array}\right.$$

Digitized by Google

que l'on obtient elles-mêmes en différentiant les trois équations

$$(15)\qquad x = f_1(\varphi, \psi, \varpi), \qquad y = f_2(\varphi, \psi, \varpi), \qquad z = f_3(\varphi, \psi, \varpi),$$

qui définissent le système en coordonnées curvilignes, puis substituant aux différentielles $d\varphi$, $d\psi$, $d\varpi$ leurs valeurs

$$d\varphi = \frac{\varphi}{x}dx + \frac{\varphi}{y}dy + \frac{\varphi}{z}dz, \qquad d\psi = \frac{\psi}{x}dx + \frac{\psi}{y}dy + \frac{\psi}{z}dz,$$

$$d\varpi = \frac{\varpi}{x}dx + \frac{\varpi}{y}dy + \frac{\varpi}{z}dz,$$

et identifiant enfin les coefficients des différentielles arbitraires $dx$, $dy$, $dz$. En effet, si l'on ajoute les trois équations de la première colonne de ce dernier système, multipliées respectivement d'abord par $\frac{\varphi}{x}, \frac{\varphi}{y}, \frac{\varphi}{z}$, puis par $\frac{\psi}{x}, \frac{\psi}{y}, \frac{\psi}{z}$, puis enfin par $\frac{\varpi}{x}, \frac{\varpi}{y}, \frac{\varpi}{z}$, en ayant égard aux conditions connues d'orthogonalité du système, qui figurent sous le numéro (48) dans notre *Mémoire* sur la courbure des surfaces, il viendra simplement :

$$(16)\qquad \frac{x}{\varphi}\Delta_1^2\varphi = \frac{\varphi}{x}, \qquad \frac{x}{\psi}\Delta_1^2\psi = \frac{\psi}{x}, \qquad \frac{x}{\varpi}\Delta_1^2\varpi = \frac{\varpi}{x},$$

équations qui, en ayant égard à notre définition (8) des quantités H, K, J, sont précisément celles de la première colonne (13), et l'on obtiendrait celle des deux autres colonnes par un procédé analogue.

Rappelons en second lieu ces autres formules, qui se déduisent immédiatement des précédentes, savoir

$$(17)\qquad \begin{cases} \mathrm{H} = \left(\frac{x}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varphi}\right)^2, & \frac{x}{\psi}\frac{x}{\varpi} + \frac{y}{\psi}\frac{y}{\varpi} + \frac{z}{\psi}\frac{z}{\varpi} = 0, \\ \mathrm{K} = \left(\frac{x}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\psi}\right)^2, & \frac{x}{\varpi}\frac{x}{\varphi} + \frac{y}{\varpi}\frac{y}{\varphi} + \frac{z}{\varpi}\frac{z}{\varphi} = 0, \\ \mathrm{J} = \left(\frac{x}{\varpi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varpi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varpi}\right)^2, & \frac{x}{\varphi}\frac{x}{\psi} + \frac{y}{\varphi}\frac{y}{\psi} + \frac{z}{\varphi}\frac{z}{\psi} = 0, \end{cases}$$

Digitized by Google

dont les trois premières s'obtiennent en élevant au carré et ajoutant les trois équations de chaque ligne horizontale (13), et les trois autres en prenant deux à deux les différentes lignes horizontales, multipliant entre elles les équations de même colonne, et ajoutant en ayant égard aux conditions d'orthogonalité précitées (48) du *Mémoire*.

On obtiendrait également les mêmes formules, en remarquant que les trois équations (16) que nous venons d'obtenir permettent d'écrire l'expression des trois cosinus $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$, sous la forme

$$\lambda = \frac{1}{\Delta_1 \rho}\frac{\rho}{x} = \Delta_1 \rho \frac{x}{\rho}, \qquad \lambda' = \frac{1}{\Delta_1 \psi}\frac{\psi}{x} = \Delta_1 \psi \frac{x}{\psi}, \qquad \lambda'' = \frac{1}{\Delta_1 \varpi}\frac{\varpi}{x} = \Delta_1 \varpi \frac{x}{\varpi},$$

et agissant de même pour les six autres, on aura pour les neuf cosinus les nouvelles expressions

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \lambda = \Delta_1 \rho \dfrac{x}{\rho}, & \mu = \Delta_1 \rho \dfrac{y}{\rho}, & \nu = \Delta_1 \rho \dfrac{z}{\rho}, \\ \lambda' = \Delta_1 \psi \dfrac{x}{\psi}, & \mu' = \Delta_1 \psi \dfrac{y}{\psi}, & \nu' = \Delta_1 \psi \dfrac{z}{\psi}, \\ \lambda'' = \Delta_1 \varpi \dfrac{x}{\varpi}, & \mu'' = \Delta_1 \varpi \dfrac{y}{\varpi}, & \nu'' = \Delta_1 \varpi \dfrac{z}{\varpi}, \end{array} \right.$$

lesquelles étant substituées dans les six relations

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, & \lambda\lambda'' + \mu\mu'' + \nu\nu'' = 0, \\ \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = 1, & \lambda''\lambda + \mu''\mu + \nu''\nu = 0, \\ \lambda''^2 + \mu''^2 + \nu''^2 = 1, & \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0, \end{array} \right.$$

fourniront précisément les relations ci-dessus (17), que nous venons de rappeler. De ces deux séries de relations, celles de la colonne de gauche peuvent être substituées, comme nouvelle définition, à celles précédemment admises pour les quantités H, K, J, et celles de la seconde colonne aux relations (48), de notre *Mémoire*, comme conditions d'orthogonalité du système.

Ces préliminaires admis, considérons un point mobile, dont les coordonnées, de quelque nature qu'elles soient, seront supposées

Digitized by Google

des fonctions déterminées d'une variable indépendante que nous appellerons $s$, sans lui attribuer pour l'instant de signification concrète; puis, envisageant les dérivées secondes $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$ comme représentant en grandeur et en signe les composantes suivant les axes rectilignes des $x$, des $y$ et des $z$, d'une certaine droite définie de cette façon en grandeur, direction et sens, formons l'expression des composantes de cette même droite suivant les normales aux trois surfaces coordonnées $\varphi$, $\psi$ et $\varpi$. Si l'on convient de désigner U, V, W ces nouvelles composantes, il est clair qu'elles auront pour expression

$$(19)\quad \begin{cases} U = \lambda \dfrac{d^2x}{ds^2} + \mu \dfrac{d^2y}{ds^2} + \nu \dfrac{d^2z}{ds^2}, \qquad V = \lambda' \dfrac{d^2x}{ds^2} + \mu' \dfrac{d^2y}{ds^2} + \nu' \dfrac{d^2z}{ds^2}, \\ W = \lambda'' \dfrac{d^2x}{ds^2} + \mu'' \dfrac{d^2y}{ds^2} + \nu'' \dfrac{d^2z}{ds^2}, \end{cases}$$

c'est-à-dire, en remplaçant les neuf cosinus $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu', \lambda'', \mu'', \nu''$, par leurs valeurs ci-dessus (18) :

$$(20)\quad \begin{cases} U = \Delta_1\varphi \left( \dfrac{x}{\varphi} \dfrac{d^2x}{ds^2} + \dfrac{y}{\varphi} \dfrac{d^2y}{ds^2} + \dfrac{z}{\varphi} \dfrac{d^2z}{ds^2} \right), \\ V = \Delta_1\psi \left( \dfrac{x}{\psi} \dfrac{d^2x}{ds^2} + \dfrac{y}{\psi} \dfrac{d^2y}{ds^2} + \dfrac{z}{\psi} \dfrac{d^2z}{ds^2} \right), \\ W = \Delta_1\varpi \left( \dfrac{x}{\varpi} \dfrac{d^2x}{ds^2} + \dfrac{y}{\varpi} \dfrac{d^2y}{ds^2} + \dfrac{z}{\varpi} \dfrac{d^2z}{ds^2} \right). \end{cases}$$

Or, si l'on suppose résolu par rapport à $x$, $y$, $z$ le système des trois équations

$$\varphi(x, y, z) = \varphi, \qquad \psi(x, y, z) = \psi, \qquad \varpi(x, y, z) = \varpi,$$

qui définit le système des coordonnées curvilignes, c'est-à-dire si l'on part des formules de transformation inverses

$$x = f_1(\varphi, \psi, \varpi), \qquad y = f_2(\varphi, \psi, \varpi), \qquad z = f_3(\varphi, \psi, \varpi),$$

et qu'on les différentie par rapport à la variable indépendante $s$, l'on aura par une première différentiation

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x}{\varphi}\varphi' + \frac{x}{\psi}\psi' + \frac{x}{\varpi}\varpi', \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{y}{\varphi}\varphi' + \frac{y}{\psi}\psi' + \frac{y}{\varpi}\varpi', \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{z}{\varphi}\varphi' + \frac{z}{\psi}\psi' + \frac{z}{\varpi}\varpi',$$

Digitized by Google

$\varphi'$, $\psi'$, $\varpi'$ désignant les dérivées des trois coordonnées $\varphi$, $\psi$, $\varpi$, par rapport à $s$; puis une seconde différentiation nous donnera, pour la première de ces trois dernières équations en particulier

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{x}{\varphi}\varphi'' + \frac{x}{\psi}\psi'' + \frac{x}{\varpi}\varpi'' + \left(\frac{x^2}{\varphi^2}\varphi' + \frac{x^2}{\varphi\psi}\psi' + \frac{x^2}{\varphi\varpi}\varpi'\right)\varphi' + \left(\frac{x^2}{\psi\varphi}\varphi' + \frac{x^2}{\psi^2}\psi' + \frac{x^2}{\psi\varpi}\varpi'\right)\psi' + \left(\frac{x^2}{\varpi\varphi}\varphi' + \frac{x^2}{\varpi\psi}\psi' + \frac{x^2}{\varpi^2}\varpi'\right)\varpi';$$

et, par conséquent, en calculant de même pour les deux autres équations, et réduisant, on aura les trois expressions :

$$(21)\quad \begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{x}{\varphi}\varphi'' + \frac{x}{\psi}\psi'' + \frac{x}{\varpi}\varpi'' + \frac{x^2}{\varphi^2}\varphi'^2 + \frac{x^2}{\psi^2}\psi'^2 + \frac{x^2}{\varpi^2}\varpi'^2 + 2\frac{x^2}{\psi\varpi}\psi'\varpi' + 2\frac{x^2}{\varpi\varphi}\varpi'\varphi' + 2\frac{x^2}{\psi}\varphi'\psi', \\ \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{y}{\varphi}\varphi'' + \frac{y}{\psi}\psi'' + \frac{y}{\varpi}\varpi'' + \frac{y^2}{\varphi^2}\varphi'^2 + \frac{y^2}{\psi^2}\psi'^2 + \frac{y^2}{\varpi^2}\varpi'^2 + 2\frac{y^2}{\psi\varpi}\psi'\varpi' + 2\frac{y^2}{\varpi\varphi}\varpi'\varphi' + 2\frac{y^2}{\psi}\varphi'\psi', \\ \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{z}{\varphi}\varphi'' + \frac{z}{\psi}\psi'' + \frac{z}{\varpi}\varpi'' + \frac{z^2}{\varphi^2}\varphi'^2 + \frac{z^2}{\psi^2}\psi'^2 + \frac{z^2}{\varpi^2}\varpi'^2 + 2\frac{z^2}{\psi\varpi}\psi'\varpi' + 2\frac{z^2}{\varpi\varphi}\varpi'\varphi' + 2\frac{z^2}{\psi}\varphi'\psi', \end{cases}$$

lesquelles étant multipliées toutes par $\Delta_1\varphi$ et respectivement par $\frac{x}{\varphi}$, $\frac{y}{\varphi}$, $\frac{z}{\varphi}$, puis ajoutées, donneront, en ayant égard aux relations (17), pour la première des expressions (20) :

$$(22)\quad \begin{cases} U = \Delta_1\varphi\left[H\varphi'' + \left(\frac{x}{\varphi}\frac{x^2}{\varphi^2} + \frac{y}{\varphi}\frac{y^2}{\varphi^2} + \frac{z}{\varphi}\frac{z^2}{\varphi^2}\right)\varphi'^2 + \left(\frac{x}{\varphi}\frac{x^2}{\psi^2} + \frac{y}{\varphi}\frac{y^2}{\psi^2} + \frac{z}{\varphi}\frac{z^2}{\psi^2}\right)\psi'^2 \right. \\ \quad + \left(\frac{x}{\varphi}\frac{x^2}{\varpi^2} + \frac{y}{\varphi}\frac{y^2}{\varpi^2} + \frac{z}{\varphi}\frac{z^2}{\varpi^2}\right)\varpi'^2 + 2\left(\frac{x}{\varphi}\frac{x^2}{\psi\varpi} + \frac{y}{\varphi}\frac{y^2}{\psi\varpi} + \frac{z}{\varphi}\frac{z^2}{\psi\varpi}\right)\psi'\varpi' \\ \quad \left. + 2\left(\frac{x}{\varphi}\frac{x^2}{\varpi\varphi} + \frac{y}{\varphi}\frac{y^2}{\varpi\varphi} + \frac{z}{\varphi}\frac{z^2}{\varpi\varphi}\right)\varpi'\varphi' + 2\left(\frac{x}{\varphi}\frac{x^2}{\varphi\psi} + \frac{y}{\varphi}\frac{y^2}{\varphi\psi} + \frac{z}{\varphi}\frac{z^2}{\varphi\psi}\right)\varphi'\psi'\right]. \end{cases}$$

Or, de ces six relations (17), d'une part, la première de la colonne de gauche étant différentiée successivement par rapport à $\varphi$, $\psi$, $\varpi$, donnera

$$(23)\quad \begin{cases} \frac{H}{\varphi} = 2\left(\frac{x}{\varphi}\frac{x^2}{\varphi^2} + \frac{y}{\varphi}\frac{y^2}{\varphi^2} + \frac{z}{\varphi}\frac{z^2}{\varphi^2}\right), \quad \frac{H}{\psi} = 2\left(\frac{x}{\varphi}\frac{x^2}{\varphi\psi} + \frac{y}{\varphi}\frac{y^2}{\varphi\psi} + \frac{z}{\varphi}\frac{z^2}{\varphi\psi}\right), \\ \qquad\qquad \frac{H}{\varpi} = 2\left(\frac{x}{\varphi}\frac{x^2}{\varphi\varpi} + \frac{y}{\varphi}\frac{y^2}{\varphi\varpi} + \frac{z}{\varphi}\frac{z^2}{\varphi\varpi}\right), \end{cases}$$

Digitized by Google

tandis que les deux autres de la même colonne, étant différentiées par rapport à $\varphi$, donneront :

$$\frac{K}{\varphi} = 2\left(\frac{x}{\psi}\frac{x'}{\psi\varpi} + \frac{y}{\psi}\frac{y'}{\psi\varpi} + \frac{z}{\psi}\frac{z'}{\psi\varpi}\right), \qquad \frac{J}{\varpi} = 2\left(\frac{x}{\varpi}\frac{x'}{\varpi\varpi} + \frac{y}{\varpi}\frac{y'}{\varpi\varpi} + \frac{z}{\varpi}\frac{z'}{\varpi\varpi}\right).$$

D'autre part, la seconde équation de la colonne de droite étant différentiée par rapport à $\varpi$, et la troisième de la même colonne par rapport à $\psi$, donneront

$$\begin{cases} \frac{x}{\varphi}\frac{x'}{\varpi} + \frac{y}{\varphi}\frac{y'}{\varpi} + \frac{z}{\varphi}\frac{z'}{\varpi} + \frac{x}{\varpi}\frac{x'}{\varphi\varpi} + \frac{y}{\varpi}\frac{y'}{\varphi\varpi} + \frac{z}{\varpi}\frac{z'}{\varphi\varpi} = 0, \\ \frac{x}{\varphi}\frac{x'}{\psi} + \frac{y}{\varphi}\frac{y'}{\psi} + \frac{z}{\varphi}\frac{z'}{\psi} + \frac{x}{\psi}\frac{x'}{\varphi\psi} + \frac{y}{\psi}\frac{y'}{\varphi\psi} + \frac{z}{\psi}\frac{z'}{\varphi\psi} = 0, \end{cases}$$

ou, en multipliant par 2 et ayant égard aux deux précédentes :

$$(24) \qquad 2\left(\frac{x}{\varphi}\frac{x'}{\varpi} + \frac{y}{\varphi}\frac{y'}{\varpi} + \frac{z}{\varphi}\frac{z'}{\varpi}\right) + \frac{J}{\varphi} = 0, \qquad 2\left(\frac{x}{\varphi}\frac{x'}{\psi} + \frac{y}{\varphi}\frac{y'}{\psi} + \frac{z}{\varphi}\frac{z'}{\psi}\right) + \frac{K}{\varphi} = 0.$$

Enfin, si l'on pose un instant pour abréger

$$(25) \qquad \begin{cases} L = \frac{x}{\varphi}\frac{x'}{\psi\varpi} + \frac{y}{\varphi}\frac{y'}{\psi\varpi} + \frac{z}{\varphi}\frac{z'}{\psi\varpi}, \\ M = \frac{x}{\psi}\frac{x'}{\varpi\varphi} + \frac{y}{\psi}\frac{y'}{\varpi\varphi} + \frac{z}{\psi}\frac{z'}{\varpi\varphi}, \\ N = \frac{x}{\varpi}\frac{x'}{\varphi\psi} + \frac{y}{\varpi}\frac{y'}{\varphi\psi} + \frac{z}{\varpi}\frac{z'}{\varphi\psi}, \end{cases}$$

et que l'on différentie les trois équations de la colonne de droite (17) respectivement par rapport à $\varphi$, $\psi$ et $\varpi$, il est clair que l'on obtiendra pour résultat

$$M + N = 0, \qquad N + L = 0, \qquad L + M = 0,$$

équations, qui, en retranchant chacune de la somme des deux autres, équivalent évidemment à celles-ci :

$$(26) \qquad L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0.$$

Digitized by Google

Dès lors, en tenant compte des égalités (23), (24), (25) et (26), l'expression (22) de la composante U deviendra

$$(27)\qquad U = \Delta_1\rho\left[H\rho'' + \frac{1}{2}\frac{H}{\rho}\rho'^2 - \frac{1}{2}\frac{K}{\rho}\psi'^2 - \frac{1}{2}\frac{J}{\rho}\varpi'^2 + \frac{H}{\varpi}\varpi'\rho' + \frac{H}{\psi}\rho'\psi'\right],$$

ou en ajoutant et retranchant pour la symétrie le terme $\frac{1}{2}\frac{H}{\rho}\varphi'^2$, et remplaçant $\Delta_1\varphi$ par sa valeur en fonction de H, on aura la première des trois formules suivantes

$$(28)\qquad \begin{cases} U = H^{-\frac{1}{2}}\left[H\rho'' + \left(\frac{H}{\rho}\rho' + \frac{H}{\psi}\psi' + \frac{H}{\varpi}\varpi'\right)\rho' - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{\rho}\rho'^2 + \frac{K}{\rho}\psi'^2 + \frac{J}{\rho}\varpi'^2\right)\right], \\ V = K^{-\frac{1}{2}}\left[K\psi'' + \left(\frac{K}{\rho}\rho' + \frac{K}{\psi}\psi' + \frac{K}{\varpi}\varpi'\right)\psi' - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{\psi}\rho'^2 + \frac{K}{\psi}\psi'^2 + \frac{J}{\psi}\varpi'^2\right)\right], \\ W = J^{\frac{1}{2}}\left[J\varpi'' + \left(\frac{J}{\rho}\rho' + \frac{J}{\psi}\psi' + \frac{J}{\varpi}\varpi'\right)\varpi' - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{\varpi}\rho'^2 + \frac{K}{\varpi}\psi'^2 + \frac{J}{\rho}\varpi'^2\right)\right], \end{cases}$$

les deux autres se déduisant de la première par la simple permutation circulaire des trois groupes (U, V, W),(H, K, J),(φ, ψ, ϖ), du moment que toutes les formules sans exception, dont nous avons fait usage pour y arriver, subsistent en s'échangeant simplement entre elles par cette triple permutation.

Si l'on remarque que l'on a évidemment, en désignant par H', K', J' les dérivées de H, K, J par rapport à la variable *s*

$$H' = \frac{H}{\rho}\rho' + \frac{H}{\psi}\psi' + \frac{H}{\varpi}\varpi', \qquad K' = \frac{K}{\rho}\rho' + \frac{K}{\psi}\psi' + \frac{K}{\varpi}\varpi',$$

$$J' = \frac{J}{\rho}\rho' + \frac{J}{\psi}\psi' + \frac{J}{\varpi}\varpi',$$

on pourra écrire les trois formules qui précédent sous la forme abrégée :

$$(29)\qquad \begin{cases} U = H^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{d(H\rho')}{ds} - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{\rho}\rho'^2 + \frac{K}{\rho}\psi'^2 + \frac{J}{\rho}\varpi'^2\right)\right], \\ V = K^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{d(K\psi')}{ds} - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{\psi}\rho'^2 + \frac{K}{\psi}\psi'^2 + \frac{J}{\psi}\varpi'^2\right)\right], \\ W = J^{\frac{1}{2}}\left[\frac{d(J\varpi')}{ds} - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{\varpi}\rho'^2 + \frac{K}{\varpi}\psi'^2 + \frac{J}{\varpi}\varpi'^2\right)\right]. \end{cases}$$

Digitized by Google

Le résultat purement analytique que nous venons d'obtenir est susceptible d'une double interprétation, mécanique d'une part, ou simplement géométrique d'autre part.

Pour la première, imaginant que le point mobile considéré est un point matériel, c'est-à-dire une masse soumise à l'action de forces données, on remarquera qu'en prenant le temps pour la variable indépendante $s$, les valeurs (19) des U, V, W sont précisément celles des composantes de son accélération suivant les normales aux trois surfaces coordonnées. Les expressions (28) ou (29) que nous venons d'obtenir seront donc celles de ces mêmes composantes, exprimées à l'aide des coordonnées curvilignes $\varphi$, $\psi$, $\varpi$ du point matériel et de leurs dérivées par rapport au temps, et conséquemment il suffira, conformément aux théorèmes fondamentaux de la dynamique, de supposer que dans ces mêmes équations (28) ou (29), U, V, W soient remplacées par les composantes données suivant les mêmes directions de la force qui sollicite le point matériel, rapportée à l'unité de masse, en y écrivant en même temps $t$ à la place de $s$, pour avoir précisément les équations différentielles du mouvement de ce point en coordonnées curvilignes. On retrouve bien ainsi, en multipliant les trois équations (28) respectivement par H, K, J, notre système d'équations (9), que nous nous étions proposé d'établir directement, sans passer par les formes antérieures dues à Lamé; et en traitant de même les trois équations (29), et substituant en même temps $u$, $v$, $w$ à leurs valeurs (3) et à H, K, J leurs valeurs (8), on retrouve semblablement les équations (7).

Expression du rayon de courbure d'une courbe donnée en coordonnées curvilignes. — Théorèmes de Lamé. — Pour la seconde interprétation, nous envisagerons le point mobile dont les coordonnées sont $\varphi$, $\psi$, $\varpi$, comme un simple point géométrique, destiné à engendrer par son mouvement, indépendamment de toute considération de temps ou de force, une courbe déterminée, supposée définie, à l'aide de la variable auxiliaire $s$, par trois équations de la forme :

$$(30) \qquad \varphi = \varphi(s), \qquad \psi = \psi(s), \qquad \varpi = \varpi(s).$$

Digitized by Google

Si maintenant nous choisissons expressément pour cette variable auxiliaire $s$ l'arc de la courbe elle-même, compté à partir d'une origine fixe sur cette courbe, et que nous convenions de représenter la courbure en chaque point de la courbe par une droite dirigée suivant le rayon de courbure et égale en grandeur à l'inverse de ce rayon, les trois composantes de cette droite représentative suivant les trois axes rectilignes des $x$, des $y$ et des $z$ auront, comme l'on sait, pour expression respectivement $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}$, et conséquemment les valeurs (19) de U, V, W exprimeront les trois composantes de la même droite suivant les normales aux trois surfaces coordonnées. Si donc l'on suppose les équations d'une courbe quelconque mises sous la forme (30), les expressions (29) seront celles des composantes de la courbure suivant les normales aux trois surfaces coordonnées, et par conséquent, les trois cosinus directeurs de la normale principale à la courbe, ou du rayon de courbure, et la grandeur de la courbure auront respectivement pour valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{U}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}, \quad \cos\beta = \dfrac{V}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}, \quad \cos\gamma = \dfrac{W}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}. \\ \\ \dfrac{1}{R} = \sqrt{U^2+V^2+W^2}, \end{array}\right.$$

formules dans lesquelles U, V, W représentent pour abréger les expressions (29).

Telles sont donc les formules qui donneront le moyen de déterminer directement, sans être obligé de revenir aux coordonnées rectilignes, la grandeur et la direction du rayon de courbure d'une courbe, dont l'équation sera donnée en coordonnées curvilignes. Ces formules correspondent donc exactement aux formules usuelles relatives aux coordonnées rectilignes

$$U = \frac{d^2x}{ds^2}, \qquad V = \frac{d^2y}{ds^2}, \qquad W = \frac{d^2z}{ds^2},$$

qui nous ont servi de point de départ pour arriver à celles-ci, et avec lesquelles elles se confondent visiblement, lorsque le système des coordonnées considéré se réduit aux coordonnées

Digitized by Google

rectilignes, c'est-à-dire lorsque l'on fait $\varphi = x$, $\psi = y$, $\varpi = z$, puisque l'on a dans ce cas, comme l'on sait, $H = K = J = 1$. Nous verrons dans le paragraphe III une importante application de ces formules.

Pour l'instant, nous ne voulons, comme exemple de leur utilité, qu'en envisager trois cas très particuliers, qui nous conduiront immédiatement à deux théorèmes élégants formulés par Lamé, au sujet des courbures d'un système orthogonal, et démontrés par lui au moyen d'une méthode toute différente.

Considérons dans ce but, pour leur faire l'application des formules qui précèdent, les courbes d'intersection des trois surfaces coordonnées entre elles, lesquelles, d'après le théorème de Dupin, ne sont autre chose que les lignes de courbure de ces mêmes surfaces, et désignons respectivement par (U), (V), (W); (U'), (V'), (W'); (U''), (V''), (W''), les expressions particulières des fonctions U, V, W, qui sont relatives à ces trois courbes. Les équations (30) qui correspondent à la première intersection, c'est-à-dire celle des surfaces $\psi$ et $\varpi$, sur laquelle la coordonnée $\varphi$ seule varie, étant de la forme

$$\varphi = \varphi(s), \qquad \psi = \text{const}, \qquad \varpi = \text{const},$$

d'où l'on conclura, par la formule déjà rappelée ($40^{bis}$) de notre mémoire,

$$ds = dn = \frac{d\varphi}{\Delta_1 \varphi} = H^{\frac{1}{2}} d\varphi,$$

donneront par conséquent

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{ds} = H^{-\frac{1}{2}}, \qquad \psi' = 0, \qquad \varpi' = 0,$$

et par suite les expressions (29) de U, V, W seront pour cette courbe

$$\left\{\begin{aligned}
(U) &= H^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{d(H^{\frac{1}{2}})}{ds} - \frac{1}{2}\frac{H}{\varphi}H^{-1}\right] = H^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}H^{-\frac{1}{2}}\frac{H}{\varphi}\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{2}H^{-1}\frac{H}{\varphi}\right] = 0,\\
(V) &= K^{-\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{2}\frac{H}{\psi}\varphi'^2\right] = -\frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}H^{-1}\frac{H}{\psi} = -\frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}\frac{lH}{\psi},\\
(W) &= J^{-\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{2}\frac{H}{\varpi}\varphi'^2\right] = -\frac{1}{2}J^{-1}H^{-\frac{1}{2}}\frac{H}{\varpi} = -\frac{1}{2}J^{-\frac{1}{2}}\frac{lH}{\varpi}.
\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

La première de ces valeurs exprime, comme cela doit être, que le rayon de courbure est situé dans le plan normal de la courbe, et les deux autres déterminent la grandeur et la direction de ce rayon dans ce plan, en exprimant dès lors que la courbure proposée est simplement la résultante des deux composantes (V) et (W), dont nous venons d'écrire les valeurs. Or, si l'on se reporte à l'expression des six courbures principales du système orthogonal, dont nous avons déjà fait usage, et que nous avons donnée après Lamé sous le numéro (59), (page 70) de notre *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces,* et si l'on remplace dans ces expressions les trois paramètres $\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi, \Delta_1\varpi$ par leurs valeurs $H^{-\frac{1}{2}}$, $K^{-\frac{1}{2}}$, $J^{-\frac{1}{2}}$, ces mêmes expressions devenant alors

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{1}{R_1}=\frac{1}{2}H^{-\frac{1}{2}}\frac{lK}{\varphi}, & \frac{1}{R_1'}=\frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}\frac{lJ}{\psi}, & \frac{1}{R_1''}=\frac{1}{2}J^{-\frac{1}{2}}\frac{lH}{\varpi}, \\ \frac{1}{R_2}=\frac{1}{2}H^{-\frac{1}{2}}\frac{lJ}{\varphi}, & \frac{1}{R_2'}=\frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}\frac{lH}{\psi}, & \frac{1}{R_2''}=\frac{1}{2}J^{-\frac{1}{2}}\frac{lK}{\varpi}, \end{array}\right.$$

on voit que l'on aura en particulier, en désignant par R le rayon de courbure de la première courbe :

$$(52)\qquad \left\{\begin{array}{l} (U)=0, \qquad (V)=-\frac{1}{R_2'}, \qquad (W)=-\frac{1}{R_1''}, \\ \left(\frac{1}{R}\right)^2=(V)^2+(W)^2=\left(\frac{1}{R_2'}\right)^2+\left(\frac{1}{R_1''}\right)^2. \end{array}\right.$$

On trouverait exactement de même pour l'arc d'intersection des surfaces $\varpi$ et $\varphi$, et son rayon de courbure R',

$$(33)\qquad (V')=0, \qquad (W')=-\frac{1}{R_2''}, \qquad (U')=-\frac{1}{R_1},$$
$$\left(\frac{1}{R'}\right)^2=(W')^2+(U')^2=\left(\frac{1}{R_2''}\right)^2+\left(\frac{1}{R_1}\right)^2;$$

et enfin pour le troisième arc, intersection des surfaces $\varphi$ et $\psi$ et son rayon de courbure R'' :

$$(34)\qquad (W'')=0, \qquad (U'')=-\frac{1}{R_2}, \qquad (V'')=-\frac{1}{R_1'},$$
$$\left(\frac{1}{R''}\right)^2=(U'')^2+(V'')^2=\left(\frac{1}{R_2}\right)^2+\left(\frac{1}{R_1'}\right)^2,$$

Digitized by Google

résultat remarquable que Lamé formule en théorème, à l'aide des dénominations introduites par lui (que nous relatons également dans notre mémoire, pages 86 87), en disant que :

Théorème I. — « *La courbure propre de l'arc d'intersection » de deux quelconques des surfaces du système est la résultante » des deux courbures principales du système conjuguées suivant » cet arc* » ; ou inversement : « *les deux courbures du système » orthogonal, conjuguées suivant un des trois arcs d'intersection » des surfaces, sont les composantes de la courbure propre de » cet arc* » (*).

Si de plus on considère à présent les angles formés par les trois normales principales à ces mêmes arcs d'intersection entre elles, ou ce qui est la même chose par les trois rayons de courbure, et que l'on désigne par $\omega$ l'angle de R′ et de R″, par $\omega'$ celui de R″ et de R, et par $\omega''$ celui de R et de R′, ayant pour le cosinus du premier de ces angles par les valeurs des composantes (33) et (34)

$$\cos\omega = \frac{(U')(U'') + (V')(V'') + (W')(W'')}{\sqrt{(U')^2 + (V')^2 + (W')^2}\sqrt{(U'')^2 + (V'')^2 + (W'')^2}}$$

$$= \frac{(U')(U'')}{\sqrt{(W')^2 + (U')^2}\sqrt{(U'')^2 + V'')^2}} = \pm \frac{\frac{1}{R_1R_2}}{\frac{1}{R'R''}},$$

il est clair qu'en permutant les trois surfaces, on aura les trois valeurs

$$\cos\omega = \pm \frac{R'R''}{R_1R_2}, \qquad \cos\omega' = \pm \frac{R''R}{R_1'R_2'}, \qquad \cos\omega'' = \pm \frac{RR'}{R_1''R_2''},$$

qui multipliées entre elles donneront la relation

$$\cos\omega\cos\omega'\cos\omega'' = \pm \frac{R^2R'^2R''^2}{R_1R_1'R_1'' \cdot R_2R_2'R_2''},$$

(*) Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § XXXVIII, page 65.

Digitized by Google

de laquelle on conclura immédiatement ce second théorème également formulé par Lamé :

THÉORÈME II. « *Lorsque deux des trois normales principales* » *des arcs d'intersection des surfaces du système deux-à-deux* » *feront entre elles un angle droit, une des six courbures prin-* » *cipales du système sera nécessairement nulle,* ou réciproquement, » *lorsque l'une des six courbures principales du système sera* » *nulle, si en même temps l'une des trois arcs d'intersection n'a* » *pas son rayon de courbure infini, deux des trois normales* » *principales de ces mêmes arcs feront entre elles un angle* » *droit* » (*).

Un dernier mot avant de revenir au mouvement d'un point en coordonnées curvilignes.

Le procédé de double interprétation, mécanique et géométrique, qui nous a permis de tirer des mêmes formules (28) et (29), à la fois une expression des composantes de la courbure d'une courbe quelconque, et une forme corrélative des équations du mouvement d'un point matériel, peut évidemment être appliqué à l'une quelconque des formes de ces dernières équations que nous avons successivement passées en revue, et fournira pour chacune une forme correspondante des composantes de la courbure, à la seule condition d'y remplacer $t$ par $s$, et par conséquent, en vertu des formules (3), $u$, $v$, $w$, respectivement par

$$\frac{1}{\Delta_1\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = H^{\frac{1}{2}}\varphi', \qquad \frac{1}{\Delta_1\psi}\frac{d\psi}{ds} = K^{\frac{1}{2}}\psi', \qquad \frac{1}{\Delta_1\varpi}\frac{d\varpi}{ds} = J^{\frac{1}{2}}\varpi'.$$

En particulier les équations (7$^{ter}$) de Lamé, que nous avons établies pour le cas du système triplement isotherme, fourniront

(*) LAMÉ, *ibidem*, § XLI, page 70. — L'énoncé réciproque que nous formulons ne se trouve pas, nous ne savons pourquoi, dans Lamé, bien qu'il constitue exactement, au même titre que le précédent, l'interprétation en langage ordinaire de la formule ci-dessus.



Digitized by Google

ainsi dans ce même cas, pour l'expression des composantes de la courbure d'une courbe quelconque, définie par les équations (30), cette nouvelle forme très symétrique, dans laquelle figurent les six courbures principales du système coordonné,

$$\left\{\begin{aligned} U &= H^{\frac{1}{2}}\frac{d}{ds}(H\rho') - \left[\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)H\rho'^2 + \frac{1}{R_1}K\psi'^2 + \frac{1}{R_2}J\varpi'^2\right], \\ V &= K^{\frac{1}{2}}\frac{d}{ds}(K\psi') - \left[\left(\frac{1}{R_1'}+\frac{1}{R_2'}\right)K\psi'^2 + \frac{1}{R_1'}J\varpi'^2 + \frac{1}{R_2'}H\rho'^2\right], \\ W &= J^{\frac{1}{2}}\frac{d}{ds}(J\varpi') - \left[\left(\frac{1}{R_1''}+\frac{1}{R_2''}\right)J\varpi'^2 + \frac{1}{R_1''}H\rho'^2 + \frac{1}{R_2''}K\psi'^2\right], \end{aligned}\right.$$

et les formes (5) et ($7^{bis}$) donneraient naissance à des expressions analogues, mais moins simples. C'est pourquoi nous ne les récrirons pas ici.

Extension des mêmes formules a un système de deux coordonnées sur une surface quelconque. — Les formules qui précèdent seront très commodes pour résoudre les deux questions connexes du mouvement d'un point matériel sur une surface donnée, ou de la détermination du rayon de courbure d'une courbe située sur une surface donnée, toutes les fois que cette surface sera susceptible de faire partie d'un système triple orthogonal, car on n'aura pour cela qu'à prendre ce système orthogonal pour système coordonné, de telle sorte que la surface donnée devienne celle de la famille au paramètre $\varpi$ qui correspond à une valeur particulière $\varpi_0$ de ce paramètre. La troisième coordonnée étant ainsi constante et donnée, la solution de l'un ou l'autre problème sera dès lors fournie, suivant le mode de double interprétation que nous avons indiqué, par les trois équations (29), dans lesquelles on aura fait à la fois

$$\varpi = \varpi_0, \qquad \varpi' = \frac{d\varpi}{dt} = 0,$$

Digitized by Google

et dont les deux premières se réduiront par conséquent dans le cas actuel simplement aux suivantes :

$$(35)\qquad \begin{cases} U = H^{-\frac{1}{2}}\left[\dfrac{d(H\wp')}{ds} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{H}{\wp}\wp'^2 + \dfrac{K}{\wp}\psi'^2\right)\right], \\ V = K^{-\frac{1}{2}}\left[\dfrac{d(K\psi')}{ds} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{H}{\psi}\wp'^2 + \dfrac{K}{\psi}\psi'^2\right)\right]. \end{cases}$$

Il nous reste à montrer que ces deux dernières formules subsistent indépendamment de l'existence du système triple orthogonal, en sorte qu'elles fourniront toujours la solution des mêmes problèmes (*) pour une surface donnée *absolument quelconque*, sans qu'on ait besoin de connaître un système triple orthogonal auquel on puisse la rattacher, ni même qu'on soit astreint à la supposer susceptible de faire partie d'un pareil système, condition qui exige, comme l'on sait, d'après un théorème important dû à M. Ossian Bonnet, la vérification d'une certaine équation aux dérivées partielles du troisième ordre.

En effet, quelle que soit la surface donnée que nous représenterons encore par analogie par $\varpi(x, y, z) = 0$, on pourra toujours supposer tracées sur cette surface deux séries de courbes orthogonales entre elles, comme le seront par exemple les deux systèmes de ligne de courbure, et prendre les paramètres $\varphi$ et $\psi$ de ces deux systèmes pour coordonnées d'un point quelconque situé sur cette surface. Ayant ainsi entre les trois coordonnées rectilignes de l'un de ces points et ces nouvelles coordonnées les trois relations

$$\varpi(x, y, z) = 0, \qquad \wp(x, y, z) = \wp, \qquad \psi(x, y, z) = \psi,$$

dont la première n'est autre par hypothèse que l'équation même de la surface donnée, et les deux autres les équations correspondant isolément à chacune des deux familles de courbes

(*) En y joignant, pour le second problème, l'expression de la troisième composante W, que nous indiquons un peu plus loin.

Digitized by Google

choisies, on pourra toujours en résolvant le système de ces trois équations par rapport à $x$, $y$, $z$, le supposer mis sous la forme

$$(36)\qquad x = f_1(\varphi, \psi), \qquad y = f_2(\varphi, \psi), \qquad z = f_3(\varphi, \psi),$$

laquelle ne diffère pas de celle que l'on avait à considérer tout à l'heure, dans l'hypothèse d'un système triple orthogonal dont la surface donnée fît partie, en attribuant dans le système (15) à la coordonnée $\varpi$ la valeur constante donnée $\varpi_0$.

Dès lors on voit d'une part, qu'en partant de ce dernier système (36), les équations (14) subsisteront encore, sauf que les termes qui contiennent les dérivées relatives à $\varpi$ n'y figureront plus. On en déduira donc exactement comme tout à l'heure les deux premières équations (16) et leurs homologues, c'est-à-dire les deux premières lignes horizontales (13), desquelles on déduira encore exactement de la même façon les trois suivantes, empruntées au groupe (17), savoir :

$$(37)\qquad \begin{cases} H = \Delta_1^{-2}\varphi = \left(\dfrac{x}{\varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{\varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{\varphi}\right)^2, \qquad K = \Delta_1^{-2}\psi = \left(\dfrac{x}{\psi}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{\psi}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{\psi}\right)^2, \\ \dfrac{x}{\varphi}\dfrac{x}{\psi} + \dfrac{y}{\varphi}\dfrac{y}{\psi} + \dfrac{z}{\varphi}\dfrac{z}{\psi} = 0. \end{cases}$$

D'autre part, on pourra envisager les trois équations (36) que nous venons d'écrire comme représentant isolément à volonté l'une ou l'autre des deux familles de courbes considérées sur la surface, à la condition d'y regarder comme une constante celui des deux paramètres $\varphi$ ou $\psi$ qui lui est relatif, et l'autre comme une variable auxiliaire, analogue au temps ou à l'arc de courbe, en fonction de laquelle les coordonnées d'un point quelconque à la courbe sont exprimées, et qu'il y aura avantage, dès lors, par une raison évidente de symétrie, à prendre pour variable indépendante dans tous les calculs relatifs à cette courbe.

Avec ce mode d'interprétation, il est clair qu'en un point quelconque situé sur la surface, les deux tangentes aux deux courbes coordonnées qui s'y rencontrent, auront des cosinus directeurs proportionnels respectivement à $\frac{x}{\psi}$, $\frac{y}{\psi}$, $\frac{z}{\psi}$ pour la pre-

Digitized by Google

mière courbe, pour laquelle, $\varphi$ recevant une valeur constante, $\psi$ joue le rôle de variable indépendante, et de même des cosinus directeurs proportionnels à $\frac{x}{\varphi}, \frac{y}{\varphi}, \frac{z}{\varphi}$ pour la seconde courbe au paramètre $\psi$, pour laquelle la variable indépendante est $\varphi$. Il suit de là, et des valeurs ci-dessus (37) de H et K, que si nous désignons encore par $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les cosinus directeurs de la normale (située dans le plan tangent à la surface donnée) à la première courbe dont le paramètre est $\varphi$, normale qui n'est autre chose que la tangente à la seconde courbe dont le paramètre est $\psi$; et de même par $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$ ceux de la normale (également située dans le plan tangent à la surface) à la seconde courbe au paramètre $\psi$, ou de la tangente à la première, ces cosinus auront encore, comme dans le tableau (18), respectivement pour expressions :

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{lll} \lambda = H^{-\frac{1}{2}}\frac{x}{\varphi} = \Delta_1\varphi\frac{x}{\varphi}, & \mu = H^{-\frac{1}{2}}\frac{y}{\varphi} = \Delta_1\varphi\frac{y}{\varphi}, & \nu = H^{-\frac{1}{2}}\frac{z}{\varphi} = \Delta_1\varphi\frac{z}{\varphi}, \\ \lambda' = K^{-\frac{1}{2}}\frac{x}{\psi} = \Delta_1\psi\frac{x}{\psi}, & \mu' = K^{-\frac{1}{2}}\frac{y}{\psi} = \Delta_1\psi\frac{y}{\psi}, & \nu' = K^{-\frac{1}{2}}\frac{z}{\psi} = \Delta_1\psi\frac{z}{\psi}. \end{array}\right.$$

Ces formules préliminaires demeurant donc les mêmes que dans le cas du système orthogonal, les deux premières formules (19) et (20) subsisteront également, pendant que les expressions (21) se réduiront, en raison de l'absence de la variable $\varpi$ dans les fonctions (36), simplement aux suivantes :

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{x}{\varphi}\varphi'' + \frac{x}{\psi}\psi'' + \frac{x^2}{\varphi^2}\varphi'^2 + \frac{x^2}{\psi^2}\psi'^2 + 2\frac{x^2}{\varphi\psi}\varphi'\psi', \\ \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{y}{\varphi}\varphi'' + \frac{y}{\psi}\psi'' + \frac{y^2}{\varphi^2}\varphi'^2 + \frac{y^2}{\psi^2}\psi'^2 + 2\frac{y^2}{\varphi\psi}\varphi'\psi', \\ \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{z}{\varphi}\varphi'' + \frac{z}{\psi}\psi'' + \frac{z^2}{\varphi^2}\varphi'^2 + \frac{z^2}{\psi^2}\psi'^2 + 2\frac{z^2}{\varphi\psi}\varphi'\psi'. \end{array}\right.$$

L'équation (22) se réduira par suite semblablement à celle-ci

$$U = \Delta_1\varphi\left[H\varphi'' + \left(\frac{x}{\varphi}\frac{x^2}{\varphi^2} + \frac{y}{\varphi}\frac{y^2}{\varphi^2} + \frac{z}{\varphi}\frac{z^2}{\varphi^2}\right)\varphi'^2 + \left(\frac{x}{\varphi}\frac{x^2}{\psi^2} + \frac{y}{\varphi}\frac{y^2}{\psi^2} + \frac{z}{\varphi}\frac{z^2}{\psi^2}\right)\psi'^2 + 2\left(\frac{x}{\varphi}\frac{x^2}{\varphi\psi} + \frac{y}{\varphi}\frac{y^2}{\varphi\psi} + \frac{z}{\varphi}\frac{z^2}{\varphi\psi}\right)\varphi'\psi'\right],$$

Digitized by Google

dans laquelle les coefficients qui multiplient $\varphi'^2$ et $\varphi'\psi'$ conservent évidemment les valeurs (23), à savoir $\frac{1}{2}\frac{H}{\varphi}$ et $\frac{H}{\psi}$, puisque H a conservé sa même valeur; et de même, le coefficient de $\psi'^2$ aura encore sa valeur fournie par la seconde équation (24), et sera par conséquent égal à $-\frac{1}{2}\frac{K}{\varphi}$, puisque cette seconde équation (24) provient uniquement de la combinaison algébrique de deux équations fournies par la différentiation des deux dernières équations (37), dont nous venons d'établir la persistance dans l'hypothèse actuelle. On arrivera donc ainsi, par la substitution dans la dernière équation qui précède, à la formule

$$U = \Delta_1\varphi\left[H\varphi'' + \frac{1}{2}\frac{H}{\varphi}\varphi'^2 - \frac{1}{2}\frac{K}{\varphi}\psi'^2 + \frac{H}{\psi}\varphi'\psi'\right],$$

qui, en ajoutant et retranchant encore le terme $\frac{1}{2}\frac{H}{\varphi}\varphi'^2$ et remplaçant $\Delta_1\varphi$ par sa valeur $H^{-\frac{1}{2}}$, fournira définitivement la première des deux formules ci-dessus (35), que nous nous proposons d'établir dans cette nouvelle hypothèse; la seconde se déduisant de la première en y changeant à la fois U en V, H en K, et $\varphi$ en $\psi$, changement qui laisse subsister toutes les formules dont nous venons de faire usage pour arriver à cette dernière, en les échangeant seulement parfois avec d'autres analogues appartenant au même type.

Les deux formules (35) suffiront dans tous les cas pour déterminer le mouvement d'un point soumis à des forces quelconques sur une surface donnée, puisqu'il n'y a alors que deux inconnues; mais pour le problème connexe de la détermination de la courbure d'une courbe située sur une surface donnée, il sera nécessaire de posséder, outre les deux composantes U et V parallèles à la surface, l'expression de la troisième composante W normale à la surface, à savoir

$$W = \lambda''\frac{d^2x}{ds^2} + \mu''\frac{d^2y}{ds^2} + \nu''\frac{d^2z}{ds^2},$$

$\lambda''$, $\mu''$, $\nu''$ désignant encore les cosinus directeurs de la normale

Digitized by Google

à la surface donnée, expression qui s'obtiendra de même en remplaçant les dérivées secondes $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$ par leurs valeurs (39), ce qui donnera en ordonnant par rapport aux dérivées $\varphi'$, $\psi'$, $\varphi''$. $\psi''$ :

$$W = \left(\lambda''\frac{x}{\varphi} + \mu''\frac{y}{\varphi} + \nu''\frac{z}{\varphi}\right)\varphi'' + \left(\lambda''\frac{x}{\psi} + \mu''\frac{y}{\psi} + \nu''\frac{z}{\psi}\right)\psi''$$
$$+ \left(\lambda''\frac{x^2}{\varphi^2} + \mu''\frac{y^2}{\varphi^2} + \nu''\frac{z^2}{\varphi^2}\right)\varphi'^2 + \left(\lambda''\frac{x^2}{\psi^2} + \mu''\frac{y^2}{\psi^2} + \nu''\frac{z^2}{\psi^2}\right)\psi'^2$$
$$+ 2\left(\lambda''\frac{x^2}{\varphi\psi} + \mu''\frac{y^2}{\varphi\psi} + \nu''\frac{z^2}{\varphi\psi}\right)\varphi'\psi'.$$

Or, ayant évidemment entre les cosinus $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ et les cosinus $(\lambda, \mu, \nu)$, $(\lambda', \mu', \nu')$, qui correspondent par hypothèse à des directions situées dans le plan tangent de la surface, les relations connues

$$\begin{cases} \lambda''\lambda + \mu''\mu + \nu''\nu = 0, & \lambda''\lambda' + \mu''\mu' + \nu''\nu' = 0, \\ \lambda'' = \mu\nu' - \nu\mu', & \mu' = \nu\lambda' - \lambda\nu', \quad \nu'' = \lambda\mu' - \mu\lambda', \end{cases}$$

lesquelles deviennent dans le cas actuel, en remettant à la place $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$, leurs valeurs (38),

$$\lambda''\frac{x}{\varphi} + \mu''\frac{y}{\varphi} + \nu''\frac{z}{\varphi} = 0, \qquad \lambda''\frac{x}{\psi} + \mu''\frac{y}{\psi} + \nu''\frac{z}{\psi} = 0,$$
$$\lambda'' = (HK)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{\varphi}\frac{z}{\psi} - \frac{z}{\varphi}\frac{y}{\psi}\right), \quad \mu'' = (HK)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{\varphi}\frac{x}{\psi} - \frac{x}{\varphi}\frac{z}{\psi}\right), \quad \nu'' = (HK)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{\varphi}\frac{y}{\psi} - \frac{y}{\varphi}\frac{x}{\psi}\right),$$

on voit qu'en remettant ces dernières valeurs dans l'expression qui précède de W, les dérivées secondes $\varphi''$ et $\psi''$ disparaîtront, et qu'elle prendra la forme simple

$$(40) \qquad W = A\varphi'^2 + B\psi'^2 + 2C\varphi'\psi',$$

Digitized by Google

dans laquelle les coefficients A, B, C ayant respectivement pour valeurs

$$(41)\quad \left\{\begin{array}{l} A=(HK)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\dfrac{y_1 z_1}{\rho_1 \psi_1}-\dfrac{z_1 y_1}{\rho_1 \psi_1}\right)\dfrac{x_1^2}{\rho_1^2}+\left(\dfrac{z_1 x_1}{\rho_1 \psi_1}-\dfrac{x_1 z_1}{\rho_1 \psi_1}\right)\dfrac{y_1^2}{\rho_1^2}+\left(\dfrac{x_1 y_1}{\rho_1 \psi_1}-\dfrac{y_1 x_1}{\rho_1 \psi_1}\right)\dfrac{z_1^2}{\rho_1^2}\right], \\ B=(HK)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\dfrac{y_2 z_2}{\rho_2 \psi_2}-\dfrac{z_2 y_2}{\rho_2 \psi_2}\right)\dfrac{x_2^2}{\psi_2^2}+\left(\dfrac{z_2 x_2}{\rho_2 \psi_2}-\dfrac{x_2 z_2}{\rho_2 \psi_2}\right)\dfrac{y_2^2}{\psi_2^2}+\left(\dfrac{x_2 y_2}{\rho_2 \psi_2}-\dfrac{y_2 x_2}{\rho_2 \psi_2}\right)\dfrac{z_2^2}{\psi_2^2}\right], \\ C=(HK)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\dfrac{y_3 z_3}{\rho_3 \psi_3}-\dfrac{z_3 y_3}{\rho_3 \psi_3}\right)\dfrac{x_3^2}{\rho_3\psi_3}+\left(\dfrac{z_3 x_3}{\rho_3 \psi_3}-\dfrac{x_3 z_3}{\rho_3 \psi_3}\right)\dfrac{y_3^2}{\rho_3\psi_3}+\left(\dfrac{x_3 y_3}{\rho_3 \psi_3}-\dfrac{y_3 x_3}{\rho_3 \psi_3}\right)\dfrac{z_3^2}{\rho_3\psi_3}\right], \end{array}\right.$$

ne dépendent, par suite, que de la surface donnée, et nullement de la courbe considérée, qui n'intervient dans cette formule (40) que par les deux dérivées $\varphi'$ et $\psi'$.

Il est facile de déduire de cette dernière remarque une interprétation simple de ces coefficients, dans le cas où l'on aura fait choix pour les lignes coordonnées des deux systèmes de lignes de courbure de la surface, et d'en conclure que dans ce cas le troisième coefficient C est encore identiquement nul, tout comme dans l'hypothèse particulière du système triple orthogonal, car il suffira dès lors de montrer que pour une courbe individuelle, choisie à volonté, ce coefficient s'évanouit.

Or, considérons dans ce but, ainsi que nous allons le faire en détail dans notre troisième chapitre, une des lignes géodésiques de la surface. En un point quelconque d'une pareille ligne, d'après sa définition même, le rayon de courbure se confond avec la normale à la surface, et par suite notre droite représentative de la courbure se réduit à sa seule composante W, en sorte que l'on a alors $W=\frac{1}{\rho}$, $\rho$ désignant le rayon de courbure de cette ligne. En vertu de cette même définition le plan osculateur de cette courbe étant une section normale de la surface, le rayon de courbure de cette section normale se confondra évidemment avec celui de la courbe elle-même, en sorte que l'on aura alors par la formule classique d'Euler

$$(42)\qquad \frac{1}{\rho}=\frac{1}{R'}\cos^2 v+\frac{1}{R''}\sin^2 v,$$

Digitized by Google

R′ et R″ désignant les deux rayons de courbure principaux de la surface au même point, et $\upsilon$ l'angle formé par la ligne géodésique avec l'une des lignes de courbure, par exemple celle dont le paramètre est $\varphi$. Ayant alors dans le triangle infinitésimal $MM_1M'$, dont le côté $MM'$ figure l'élément $ds$ de cette ligne (fig. 1), d'une part

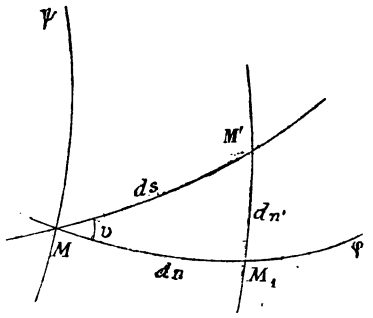


Fig. 1.

$$MM_1 = dn = ds\cos\upsilon, \qquad MM' = dn' = ds\sin\upsilon;$$

et, d'autre part, $dn$ et $dn'$ représentant par hypothèse la distance de deux points infiniment voisins pour lesquels soit $\varphi$, soit $\psi$ reste constant, d'où il suit que l'on a par les valeurs (37)

$$dn^2 = \left(\frac{x}{\varphi}d\varphi\right)^2 + \left(\frac{y}{\varphi}d\varphi\right)^2 + \left(\frac{z}{\varphi}d\varphi\right)^2 = \left[\left(\frac{x}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varphi}\right)^2\right]d\varphi^2 = \mathrm{H}d\varphi^2$$

$$dn'^2 = \left(\frac{x}{\psi}d\psi\right)^2 + \left(\frac{y}{\psi}d\psi\right)^2 + \left(\frac{z}{\psi}d\psi\right)^2 = \left[\left(\frac{x}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\psi}\right)^2\right]d\psi^2 = \mathrm{K}d\psi^2$$

ou en extrayant les racines

$$(45) \qquad dn = \sqrt{\mathrm{H}}\,d\varphi, \qquad dn' = \sqrt{\mathrm{K}}\,d\psi,$$

on voit qu'on aura en égalant respectivement ces deux valeurs de $dn$ et $dn'$, et divisant ensuite par $ds$ :

$$\cos\upsilon = \sqrt{\mathrm{H}}\frac{d\varphi}{ds} = \sqrt{\mathrm{H}}\varphi', \qquad \sin\upsilon = \sqrt{\mathrm{K}}\frac{d\psi}{ds} = \sqrt{\mathrm{K}}\psi',$$

et dès lors, en remettant ces dernières valeurs dans l'expression (42) de $\frac{1}{\rho}$, on aura définitivement pour la ligne géodésique en question

$$(44) \qquad \mathrm{W} = \frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R}'}\varphi'^2 + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}''}\psi'^2.$$

Digitized by Google

La comparaison de cette dernière expression de W pour cette ligne avec celle fournie par notre formule générale (40) montre, les coefficients A, B, C étant, avons-nous dit, indépendants de la ligne considérée, que l'on a alors

$$(45) \qquad A = \frac{H}{R'}, \qquad B = \frac{K}{R''}, \qquad C = 0;$$

et, par suite, sous la seule condition de prendre les lignes de courbure de la surface pour système coordonné, l'expression de la troisième composante cherchée de la courbure d'une courbe quelconque située sur cette surface sera dans tous les cas

$$(46) \qquad W = \frac{H}{R'}\varphi'^2 + \frac{K}{R''}\psi'^2,$$

les coefficients $\frac{1}{R'}$ et $\frac{1}{R''}$, qui représentent les courbures principales de la surface, résultant de l'identification des valeurs (41) et (45), c'est-à-dire étant définis par les égalités suivantes (*) :

$$(47) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{R'} = \dfrac{1}{H\sqrt{HK}}\left[\left(\dfrac{y}{\varphi}\dfrac{z}{\psi} - \dfrac{z}{\varphi}\dfrac{y}{\psi}\right)\dfrac{x^2}{\varphi^2} + \left(\dfrac{z}{\varphi}\dfrac{x}{\psi} - \dfrac{x}{\varphi}\dfrac{z}{\psi}\right)\dfrac{y^2}{\varphi^2} + \left(\dfrac{x}{\varphi}\dfrac{y}{\psi} - \dfrac{y}{\varphi}\dfrac{x}{\psi}\right)\dfrac{z^2}{\varphi^2}\right], \\ \dfrac{1}{R''} = \dfrac{1}{K\sqrt{HK}}\left[\left(\dfrac{y}{\varphi}\dfrac{z}{\psi} - \dfrac{z}{\varphi}\dfrac{y}{\psi}\right)\dfrac{x^2}{\psi^2} + \left(\dfrac{z}{\varphi}\dfrac{x}{\psi} - \dfrac{x}{\varphi}\dfrac{z}{\psi}\right)\dfrac{y^2}{\psi^2} + \left(\dfrac{x}{\varphi}\dfrac{y}{\psi} - \dfrac{y}{\varphi}\dfrac{x}{\psi}\right)\dfrac{z^2}{\psi^2}\right]. \end{cases}$$

---

(*) L'expression de ces rayons de courbure principaux R′ et R″, en fonction des coordonnées curvilignes $\varphi$ et $\psi$, ne se trouve nulle part dans les *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de Gauss, mais il est facile néanmoins de constater l'accord de notre théorie avec celle de Gauss, en déduisant de l'expression ci-dessus (47) que nous donnons pour les deux courbures principales, l'expression inverse de leur produit $k = \frac{1}{R'R''}$, que l'illustre géomètre adopte pour mesure de la courbure de la surface en un point quelconque (*loc. cit.*, § 8, théorème V).

En effet, d'une part nos formules (37) permettent d'écrire le produit HK sous la forme

$$HK = \left[\left(\frac{x}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varphi}\right)^2\right]\left[\left(\frac{x}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\psi}\right)^2\right] - \left(\frac{x}{\varphi}\frac{x}{\psi} + \frac{y}{\varphi}\frac{y}{\psi} + \frac{z}{\varphi}\frac{z}{\psi}\right)^2$$

$$= \left(\frac{y}{\varphi}\frac{z}{\psi} - \frac{z}{\varphi}\frac{y}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varphi}\frac{x}{\psi} - \frac{x}{\varphi}\frac{z}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{x}{\varphi}\frac{y}{\psi} - \frac{y}{\varphi}\frac{x}{\psi}\right)^2;$$

Digitized by Google

Les formules (35) et (46) déterminent complètement la grandeur et la direction du rayon de courbure d'une courbe située sur la surface donnée et supposée définie par les équations de la forme (30). Dès lors pour appliquer ces formules à une courbe quelconque tracée sur la surface donnée $\varpi(x, y, z) = 0$, et qu'on suppose, en conséquence, définie par une équation telle que

$$F(\varphi, \psi) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \psi = f(\varphi),$$

entre les deux coordonnées $\varphi$ et $\psi$ relatives aux deux lignes de courbure de cette surface, ayant encore, en vertu des formules ci-dessus (43), pour l'expression de l'élément $ds$ de cette ligne

$$(48) \qquad ds^2 = dn^2 + dn'^2 = \mathrm{H}d\varphi^2 + \mathrm{K}d\psi^2,$$

on écrira cette dernière équation, en y remettant à la place de $\psi$ et $d\psi$ leurs valeurs $f(\varphi)$ et $f'(\varphi)\,d\varphi$, puis extrayant la racine, sous la forme

$$ds = \mathfrak{F}(\varphi)d\varphi \qquad \text{d'où} \qquad s + \mathrm{C} = \int \mathfrak{F}(\varphi)d\varphi\,;$$

puis joignant cette dernière équation intégrale à l'équation donnée de la courbe, et les résolvant par rapport à $\varphi$ et $\psi$, on aura finalement les deux autres équivalentes

$$\varphi = \varphi(s), \qquad \psi = \psi(s),$$

---

d'autre part, si nous récrivons dans ce but nos formules (41) et (47), ainsi qu'il suit :

$$(\mathrm{HK})^{-\frac{1}{2}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathfrak{A}} = \frac{\mathrm{B}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathfrak{C}}, \qquad \frac{1}{\mathrm{R}'} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathrm{H}\sqrt{\mathrm{HK}}}, \qquad \frac{1}{\mathrm{R}''} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{HK}}},$$

il sera visible que les quantités appelées par Gauss D, D'', D' seront précisément ces nouvelles quantités $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, et que, par suite, la dernière, D' ou $\mathfrak{C}$, sera nulle si l'on prend les lignes de courbure pour système coordonné, en vertu de notre troisième équation (45). Dès lors il est manifeste que l'expression du produit $k = \frac{1}{\mathrm{R}'\mathrm{R}''} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{(\mathrm{HK})^2}$, qui résulte des valeurs précédentes, coïncidera exactement avec celle que donne l'illustre Gauss, à la fin du § 10 de l'ouvrage cité. (Gauss Wercke, Bd. IV, pp. 234.)

Digitized by Google

qui, conjointement avec l'équation de la surface supposée mise sous la forme (36), et les expressions (37) qui en résulteront, permettront alors l'application immédiate de nos formules (35), (46) et (47), et fourniront l'expression des composantes de la courbure cherchée en fonction des seules coordonnées curvilignes $\varphi$ et $\psi$ du point considéré.

Dans le problème du mouvement d'un point sur une surface donnée, cette dernière formule (46) que nous venons d'établir, bien qu'inutile à la détermination du mouvement, c'est-à-dire de l'expression des coordonnées du point mobile en fonction du temps, fera connaître la réaction normale de la surface ou, ce qui est la même chose au sens près, la pression exercée par le point mobile sur la surface.

Remarquons enfin en terminant que l'expression de la troisième composante W, donnée par les formules (29) dans l'hypothèse d'un système triple orthogonal, se réduit elle aussi à la même valeur (46), lorsqu'on y fait $\varpi = \text{const.}$, et que l'on a égard à l'expression (31) des deux rayons principaux $R_1''$ et $R_2''$ de cette surface $\varpi$ : coïncidence qui était nécessaire *a priori*, du moment que cette hypothèse de l'existence du système triple orthogonal peut être envisagée comme un cas particulier du problème plus général, que nous venons de traiter en dernier lieu.

Les trois formules (35) et (46) fourniront donc dans tous les cas la solution de ces deux problèmes connexes et en quelque sorte parallèles que nous venons d'envisager, lors même qu'il n'existerait aucun système triple orthogonal auquel on la supposât rattachée. Cette généralisation, bien qu'assez facile à pressentir, n'était d'ailleurs nullement évidente *a priori*, et devait de toute nécessité être établie rigoureusement, pour donner aux méthodes et aux formules, qui vont faire l'objet des deux paragraphes suivants, toute leur portée, sans quoi ces méthodes et ces calculs perdraient beaucoup de leur intérêt par suite de l'étendue trop restreinte de leur champ d'application.

Digitized by Google

## II

**Mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une surface donnée. — Cas de réduction du problème aux quadratures. — Exemples relatifs à l'ellipsoïde, au cône du second ordre, à la sphère et au paraboloïde.**

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA TRAJECTOIRE. — Les équations (9), que nous avons établies dans le paragraphe précédent, très remarquables par leur symétrie, permettent de ramener dans tous les cas à la détermination de la trajectoire, c'est-à-dire en fait à l'intégration d'une seule équation différentielle du second ordre, la détermination complète du mouvement d'un point matériel soumis à des forces quelconques et assujetti à rester sur une surface donnée quelconque.

En effet, si on la suppose d'abord susceptible de faire partie d'un système triple orthogonal, prenons pour système coordonné un système tel que la surface donnée puisse être considérée comme une surface individuelle de la famille au paramètre $\varpi$. Il suffira dans ce cas d'imaginer que la coordonnée $\varpi$ du point matériel conserve à toute époque la valeur particulière de ce paramètre qui caractérise la surface donnée, et dès lors la solution cherchée devra consister dans une certaine relation entre chacune des variables $\varphi$ et $\psi$ et le temps.

Si nous désignons toujours par U, V, W les composantes de la force extérieure donnée suivant les normales aux trois surfaces coordonnées, les équations (9) définiront le mouvement du point, à la condition d'adjoindre à la troisième composante W la réaction N de la surface sur le point, laquelle est par hypothèse toujours normale à la surface, c'est-à-dire en d'autres termes d'écrire simplement W + N au lieu de W dans la troisième de ces équations, et de supposer, en outre, la variable $\varpi$ remplacée partout dans ces équations par la valeur de ce paramètre relative à la surface donnée, c'est-à-dire d'y faire à

Digitized by Google

la fois $\varpi = \varpi_0 = \text{const.}$, $\frac{d\varpi}{dt} = 0$ et $\frac{d^2\varpi}{dt^2} = 0$. Avec ces hypothèses la troisième équation (9) se réduira à

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{H}{\varpi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{K}{\varpi}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right] = J^{\frac{1}{2}}(W + N),$$

ou

$$N = -W - \frac{1}{2\sqrt{J}}\left[\frac{H}{\varpi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{K}{\varpi}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right],$$

et n'aura d'autre utilité que de déterminer la grandeur de la réaction inconnue *a priori* N, lorsqu'on aura déterminé à l'aide des deux premières équations les coordonnées $\varphi$ et $\psi$ du point en fonction du temps. Mais les deux premières équations, qui deviennent dans les mêmes circonstances

$$(49)\quad \begin{cases} H\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + \dfrac{d\varphi}{dt}\left(\dfrac{H}{\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt} + \dfrac{H}{\psi}\dfrac{d\psi}{dt}\right) - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{H}{\varphi}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \dfrac{K}{\varphi}\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2\right] = H^{\frac{1}{2}}.U, \\ K\dfrac{d^2\psi}{dt^2} + \dfrac{d\psi}{dt}\left(\dfrac{K}{\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt} + \dfrac{K}{\psi}\dfrac{d\psi}{dt}\right) - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{H}{\psi}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \dfrac{K}{\psi}\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2\right] = K^{\frac{1}{2}}.V, \end{cases}$$

fourniront l'expression cherchée des coordonnées $\varphi$ et $\psi$ en fonction du temps, en opérant de la façon que nous allons indiquer.

Si, au contraire, on ne suppose pas que la surface donnée fasse partie d'un système triple orthogonal, on se souvient que ces mêmes équations (49) subsisteront encore, en prenant un système de deux coordonnées orthogonales $\varphi$ et $\psi$ sur la surface, comme par exemple les lignes de courbure, et fourniront par conséquent de nouveau la solution du problème proposé.

Dans ce dernier cas la grandeur de la réaction inconnue N de la surface sera de même fournie par l'équation (46), dans laquelle on aura encore écrit W + N à la place de W (ainsi que $t$ comme variable indépendante au lieu de $s$), et aura par conséquent pour expression

$$N = -W + \left[\frac{H}{R'}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{K}{R''}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right].$$

Digitized by Google

Dès lors, dans l'un et l'autre cas, pour déterminer $\varphi$ et $\psi$ en fonction du temps, on remarquera tout d'abord, ainsi que nous l'avons déjà dit à l'occasion du théorème des forces vives, que les premières parenthèses de chacune de ces deux équations ne sont autre chose que les dérivées totales $\frac{dH}{dt}$ et $\frac{dK}{dt}$, attendu que, $\varpi$ étant par hypothèse constant, on a simplement dans le cas actuel

$$dH = \frac{H}{\varphi}d\varphi + \frac{H}{\psi}d\psi, \qquad dK = \frac{K}{\varphi}d\varphi + \frac{K}{\psi}d\psi;$$

en second lieu, qu'en se reportant à la définition de la fonction $\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi)$, qui consiste dans l'équation ($10^{bis}$) ou, ce qui est la même chose, en remplaçant les trois éléments de normales $dn$, $dn'$, $dn''$ par leurs valeurs, dans celle-ci

$$U.H^{\frac{1}{2}}d\varphi + V.K^{\frac{1}{2}}d\psi + W.J^{\frac{1}{2}}d\varpi = d\mathcal{F}(\varphi,\psi,\varpi) = \frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}d\varphi + \frac{d\mathcal{F}}{d\psi}d\psi + \frac{d\mathcal{F}}{d\varpi}d\varpi,$$

les seconds membres de ces deux mêmes équations (49) peuvent être écrits sous la forme plus simple et plus expressive :

$$(50) \qquad UH^{\frac{1}{2}} = \frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}, \qquad VK^{\frac{1}{2}} = \frac{d\mathcal{F}}{d\psi}.$$

A l'aide de ces remarques, nous commencerons par écrire ces deux équations (49), après réduction, sous la forme plus concise

$$\begin{cases} H\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{d\varphi}{dt}\dfrac{dH}{dt} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{H}{\psi}\dfrac{d\varphi}{dt}\dfrac{d\psi}{dt} - \dfrac{K}{\varphi}\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2\right] = \dfrac{d\mathcal{F}}{d\varphi}, \\ K\dfrac{d^2\psi}{dt^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{dK}{dt} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{K}{\varphi}\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt} - \dfrac{H}{\psi}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = \dfrac{d\mathcal{F}}{d\psi}, \end{cases}$$

ou, en les multipliant respectivement par $2\frac{d\varphi}{dt}$ et $2\frac{d\psi}{dt}$, sous celle-ci

$$\begin{cases} H.2\dfrac{d\varphi}{dt}\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2\dfrac{dH}{dt} + \dfrac{H}{\psi}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2\dfrac{d\psi}{dt} - \dfrac{K}{\varphi}\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2\dfrac{d\varphi}{dt} = 2\dfrac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt}, \\ K.2\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{d^2\psi}{dt^2} + \left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2\dfrac{dK}{dt} + \dfrac{K}{\varphi}\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2\dfrac{d\varphi}{dt} - \dfrac{H}{\psi}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2\dfrac{d\psi}{dt} = 2\dfrac{d\mathcal{F}}{d\psi}\dfrac{d\psi}{dt}, \end{cases}$$

Digitized by Google

ou enfin, en mettant en évidence des quantités faciles à apercevoir,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left[\mathrm{H}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] + \dfrac{1}{\mathrm{H}}\dfrac{\mathrm{H}}{\psi}\cdot\mathrm{H}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2\cdot\dfrac{d\psi}{dt} - \left[\dfrac{1}{\mathrm{K}}\dfrac{\mathrm{K}}{\varphi}\cdot\mathrm{K}\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2 + 2\dfrac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right]\dfrac{d\varphi}{dt} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\left[\mathrm{K}\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2\right] + \dfrac{1}{\mathrm{K}}\dfrac{\mathrm{K}}{\varphi}\cdot\mathrm{K}\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2\cdot\dfrac{d\varphi}{dt} - \left[\dfrac{1}{\mathrm{H}}\dfrac{\mathrm{H}}{\psi}\cdot\mathrm{H}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2\dfrac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right]\dfrac{d\psi}{dt} = 0. \end{array}\right.$$

Or, si l'on se reporte aux équations (3) et aux définitions (8) des deux quantités H et K, on voit que les deux expressions $\mathrm{H}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ et $\mathrm{K}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$, que nous venons de faire apparaître ainsi dans ces équations, ne sont autre chose que $u^2$ et $v^2$; en multipliant donc les deux équations par $dt$, on pourra les écrire plus simplement encore, ainsi qu'il suit :

$$\left\{\begin{array}{l} d.u^2 + u^2\dfrac{l\mathrm{H}}{\psi}d\psi - \left(v^2\dfrac{l\mathrm{K}}{\varphi} + 2\dfrac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)d\varphi = 0, \\ d.v^2 + v^2\dfrac{l\mathrm{K}}{\varphi}d\varphi - \left(u^2\dfrac{l\mathrm{H}}{\psi} + 2\dfrac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)d\psi = 0. \end{array}\right.$$

Cela posé, pour obtenir l'équation différentielle de la trajectoire du point matériel, nous multiplierons ces deux dernières équations respectivement par $v^2$ et $u^2$, et nous retrancherons la première de la seconde, ce qui nous donnera

$$u^2d.v^2 - v^2d.u^2 - u^2d\psi\left[(u^2+v^2)\frac{l\mathrm{H}}{\psi} + 2\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right] + v^2d\varphi\left[(u^2+v^2)\frac{l\mathrm{K}}{\varphi} + 2\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right] = 0,$$

résultat que nous écrirons ainsi :

$$(51)\quad \left\{\begin{array}{l} u^2d.v^2 - v^2d.u^2 - (u^2+v^2)\left[\left(\dfrac{l\mathrm{H}}{\psi} + \dfrac{2}{u^2+v^2}\dfrac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)u^2d\psi \right. \\ \qquad\qquad \left. - \left(\dfrac{l\mathrm{K}}{\varphi} + \dfrac{2}{u^2+v^2}\dfrac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)v^2d\varphi\right] = 0. \end{array}\right.$$

Digitized by Google

Or, l'équation des forces vives (12) nous donnant

$$\frac{2}{u^2+v^2}=\frac{1}{\mathcal{F}(\varphi,\psi,\varpi)+C},$$

si nous reportons cette valeur dans l'équation qui précède, on voit que les coefficients de $u^2d\psi$ et $v^2d\varphi$ sous les crochets pourront s'écrire simplement

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{lH}{\psi}+\dfrac{2}{u^2+v^2}\dfrac{d\mathcal{F}}{d\psi}=\dfrac{lH}{\psi}+\dfrac{\dfrac{d\mathcal{F}}{d\psi}}{\mathcal{F}+C}=\dfrac{d}{d\psi}l.H(\mathcal{F}+C)=\dfrac{lH_1}{\psi},\\[2ex]\dfrac{lK}{\varphi}+\dfrac{2}{u^2+v^2}\dfrac{d\mathcal{F}}{d\varphi}=\dfrac{lK}{\varphi}+\dfrac{\dfrac{d\mathcal{F}}{d\varphi}}{\mathcal{F}+C}=\dfrac{d}{d\varphi}l.K(\mathcal{F}+C)=\dfrac{lK_1}{\varphi},\end{array}\right.$$

en convenant de représenter dorénavant par $H_1$ et $K_1$ les deux fonctions données

$$(52)\qquad H_1=H\Big(\mathcal{F}(\varphi,\psi,\varpi)+C\Big),\qquad K_1=K\Big(\mathcal{F}(\varphi,\psi,\varpi)+C\Big),$$

en sorte qu'avec ces notations, en séparant en deux membres, l'équation précédente (51) prendra la forme très simple :

$$(53)\qquad u^2d.v^2-v^2d.u^2=(u^2+v^2)\left(u^2\frac{lH_1}{\psi}d\psi-v^2\frac{lK_1}{\varphi}d\varphi\right).$$

Si l'on fait attention qu'en divisant, soit par $(u^2)^2$, soit par $(v^2)^2$, cette équation ne contiendra plus $u^2$ et $v^2$ que par le rapport $\frac{u^2}{v^2}$ ou $\frac{v^2}{u^2}$ et la différentielle de ces rapports, et que par conséquent la différentielle $dt$ se trouvera éliminée, on reconnaîtra que l'équation que nous venons d'écrire équivaut à une relation différentielle entre les coordonnées $\varphi$ et $\psi$ seulement à l'exclusion du temps, et que par conséquent elle peut être considérée comme l'équation différentielle de la trajectoire, écrite avec une certaine notation conventionnelle.

Pour l'obtenir sous forme explicite analogue, d'une équation



Digitized by Google

différentielle entre $\varphi$ et $\psi$, il n'y aura d'ailleurs qu'à la multiplier par $dt^4$, et, en se rappelant que, le temps étant par hypothèse la variable indépendante, $dt$ doit être considéré comme constant, l'écrire sous cette forme

$$(udt)^2 d.(vdt)^2 - (vdt)^2 d.(udt)^2 = \left[(udt)^2 + (vdt)^2\right]\left[(udt)^2 \frac{l\mathrm{H}_1}{\psi} d\psi - (vdt)^2 \frac{l\mathrm{K}_1}{\varphi} d\varphi\right],$$

puis y remplacer $(udt)^2$ et $(vdt)^2$ par leurs valeurs respectives $\mathrm{H}d\varphi^2$ et $\mathrm{K}d\psi^2$, ce qui donnera définitivement l'équation :

$$(54)\quad \left\{ \mathrm{H}d\varphi^2 . d(\mathrm{K}d\psi^2) - \mathrm{K}d\psi^2 . d(\mathrm{H}d\varphi^2) = (\mathrm{H}d\varphi^2 + \mathrm{K}d\psi^2)\left[\mathrm{H}d\varphi^2 . \frac{l\mathrm{H}_1}{\psi} d\psi - \mathrm{K}d\psi^2 . \frac{l\mathrm{K}_1}{\varphi} d\varphi\right]. \right.$$

Telle sera donc en réalité pour nous l'équation différentielle de la trajectoire d'un point matériel soumis à des forces données et astreint à demeurer sur une surface donnée, exprimée au moyen des coordonnées $\varphi$ et $\psi$, qui déterminent la position de chaque point sur cette surface. Mais il est évident que, pour la clarté et la simplicité des calculs, il y aura grand avantage à conserver pour cette même équation la forme simplifiée (53), qu'on peut d'ailleurs considérer, non seulement comme équivalente, mais comme adéquate à cette dernière, en entendant que $u^2$ et $v^2$ y désignent non plus les carrés des vitesses elles-mêmes, mais les quantités proportionnelles $\mathrm{H}d\varphi^2 = u^2dt^2$ et $\mathrm{K}d\psi^2 = v^2dt^2$; et nous emploierons ainsi cette forme (53) dans tout ce qui va suivre, en attribuant à $u^2$ et $v^2$ tantôt leur sens réel, tantôt le sens conventionnel que nous venons de dire, suivant qu'il nous sera plus commode pour le raisonnement ou plus avantageux pour le calcul.

La connaissance de la trajectoire, en supposant que l'on parvienne à intégrer cette équation du second ordre, suffira d'ailleurs pour achever ensuite complètement la détermination du mouvement du point, car ayant ainsi obtenu pour équation de cette courbe la relation $\psi = f(\varphi)$, qui donnera $d\psi = f'(\varphi)d\varphi$, si

Digitized by Google

l'on reporte cette valeur de $\psi$ dans les expressions de H et de K, l'équation (11) étant résolue par rapport à $dt^2$ deviendra, en extrayant les racines et y faisant $\frac{d\varpi}{dt} = 0$,

$$(55) \qquad dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{H + Kf'(\varphi)^2}{\mathcal{F}(\varphi, f(\varphi), \varpi) + C} \right)^{\frac{1}{2}} d\varphi,$$

et fournira dès lors par une simple quadrature une nouvelle relation de la forme $t = F(\varphi)$, qui résolue par rapport à $\varphi$ deviendra $\varphi = \Phi(t)$, et donnera en substituant dans l'équation de la trajectoire la nouvelle relation $\psi = \Psi(t)$, qui, jointe à la précédente, constitue la solution complète du problème. La question est donc ainsi ramenée tout entière, comme on le voit, à l'intégration de l'équation (53) ou (54), laquelle introduira deux constantes arbitraires. Ces deux constantes, jointes à la constante C, qui figure dans l'équation des forces vives, et à celle introduite par la quadrature de l'expression (55), se détermineront simultanément, en se donnant les valeurs

$$\varphi_0, \qquad \psi_0, \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = u_0(\Delta_1\varphi)_0, \qquad \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = v_0(\Delta_1\psi)_0,$$

qui définissent la position du point matériel et sa vitesse sur la surface donnée à l'origine du mouvement.

Cas d'intégration de cette équation. — La forme simple et remarquable (53), que nous avons obtenue pour l'équation différentielle de la trajectoire, permet d'apercevoir facilement plusieurs cas assez étendus, dans lesquels il est possible d'en former l'intégrale générale à l'aide de simples quadratures.

On est conduit en effet tout naturellement, par cette forme même, à examiner successivement les trois cas suivants :

I° Supposons en premier lieu que l'on ait à la fois $\frac{\partial H_1}{\partial \psi} = 0$ et $\frac{\partial K_1}{\partial \varphi} = 0$, ou, en d'autres termes, que l'on ait simultanément

$$(56) \qquad H_1 = \Phi(\varphi), \qquad K_1 = \Psi(\psi),$$

Digitized by Google

$\Phi$ et $\Psi$ étant deux fonctions entièrement arbitraires d'une seule variable. L'équation (53) de la trajectoire se réduisant alors à

$$u^2 d.v^2 - v^2 d.u^2 = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, en divisant par $(u^2)^2$ à $d\left(\frac{v^2}{u^2}\right) = 0$, admet pour intégrale première

$$\frac{v^2}{u^2} = C_1^2.$$

Or, si l'on remplace $u^2$ et $v^2$ par leurs valeurs, soit réelles, soit conventionnelles, on aura, en se rappelant les définitions (52) de $H_1$ et $K_1$ :

$$(57) \qquad \frac{v^2}{u^2} = \frac{K d\psi^2}{H d\varphi^2} = \frac{K(\mathcal{F} + C).d\psi^2}{H(\mathcal{F} + C).d\varphi^2} = \frac{K_1 d\psi^2}{H_1 d\varphi^2}.$$

Si l'on tient compte des hypothèses (56), l'intégrale première qu'on vient d'obtenir pourra donc s'écrire

$$\frac{\Psi(\psi) d\psi^2}{\Phi(\varphi) d\varphi^2} = C_1^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\sqrt{\Psi(\psi)}\, d\psi}{\sqrt{\Phi(\varphi)}\, d\varphi} = C_1,$$

ou encore, en séparant les variables,

$$\sqrt{\Psi(\psi)} d\psi = C_1 \sqrt{\Phi(\varphi)} d\varphi,$$

et donnera par conséquent pour intégrale générale

$$(58) \qquad \int \sqrt{\Psi(\psi)} d\psi - C_1 \int \sqrt{\Phi(\varphi)} d\varphi = C'.$$

Il est inutile d'écrire le double signe introduit par l'extraction des racines devant le coefficient $C_1$, puisque cette constante est complètement arbitraire : la solution dans ce cas sera donc toujours renfermée dans le type unique (58).

II° Supposons en second lieu que l'une des deux dérivées $\frac{lH_1}{\psi}$ ou $\frac{lK_1}{\varphi}$ seulement étant nulle à présent, $\frac{lH_1}{\psi}$ par exemple, l'autre

Digitized by Google

dérivée ne soit, comme la quantité $H_1$, fonction que de la variable $\varphi$ seule ; en d'autres termes, nos hypothèses sont pour ce cas

$$(59) \qquad \frac{lH_1}{\psi} = 0, \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{d\psi}\left(\frac{lK_1}{\varphi}\right) = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(60) \qquad H_1 = F(\varphi), \qquad K_1 = \Phi(\varphi)\Psi(\psi),$$

les symboles F, $\Phi$, $\Psi$ désignant des fonctions entièrement arbitraires d'une seule variable. En introduisant les hypothèses (59) dans l'équation de la trajectoire (53), et divisant tous les termes par $(v^2)^2$, cette équation pourra s'écrire dans ce cas

$$\frac{u^2 d.v^2 - v^2 d.u^2}{(v^2)^2} = \frac{u^2 + v^2}{v^2}\left(-\frac{lK_1}{\varphi} d\varphi\right),$$

ou sous forme plus simple

$$-d\left(\frac{u^2}{v^2}\right) = \left(1 + \frac{u^2}{v^2}\right)\left(-\frac{lK_1}{\varphi} d\varphi\right),$$

ou encore, en changeant tous les signes et ayant égard aux hypothèses (60),

$$\frac{d\left(\frac{u^2}{v^2}\right)}{1 + \frac{u^2}{v^2}} = \frac{d}{d\varphi} l\Phi(\varphi) . d\varphi,$$

équation immédiatement intégrable par quadrature, qui donne pour intégrale première :

$$l\left(1 + \frac{u^2}{v^2}\right) = l\Phi(\varphi) + l.C_1^2 \qquad \text{ou} \qquad 1 + \frac{u^2}{v^2} = C_1^2 \Phi(\varphi).$$

Or si l'on substitue au rapport $\frac{u^2}{v^2}$ sa valeur, inverse de celle

Digitized by Google

du rapport (57), et qui sera par conséquent dans le cas actuel, en tenant compte des hypothèses (60),

$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{H_1 d\varphi^2}{K_1 d\psi^2} = \frac{F(\varphi) d\varphi^2}{\Phi(\varphi)\Psi(\psi) d\psi^2},$$

cette intégrale première pourra s'écrire

$$\frac{F(\varphi) d\varphi^2}{\Phi(\varphi)\Psi(\psi) d\psi^2} = C_1^2 \Phi(\varphi) - 1,$$

équation dans laquelle les variables se séparent immédiatement, en l'écrivant ainsi, après avoir extrait les racines,

$$\sqrt{\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{C_1^2 \Phi(\varphi) - 1}} = \pm \sqrt{\Psi(\psi)}\, d\psi,$$

et qui donnera par conséquent, au moyen de simples quadratures, l'une ou l'autre des deux solutions renfermées dans la formule :

$$(61) \qquad \int \sqrt{\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{C_1^2 \Phi(\varphi) - 1}} \pm \int \sqrt{\Psi(\psi)}\, d\psi = C'.$$

Il est bien clair que si nous eussions admis inversement les hypothèses

$$\frac{l K_1}{\varphi} = 0, \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{l H_1}{\psi}\right) = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(62) \qquad K_1 = F(\psi), \qquad H_1 = \Phi(\varphi)\Psi(\psi),$$

qui se déduisent des précédentes par la simple permutation de $H_1$ et de $K_1$, ou ce qui est la même chose de H et K, de $\varphi$ et de $\psi$, et des symboles correspondants $\Phi$ et $\Psi$, pendant que l'équation différentielle elle-même (54) n'est pas atteinte par cette permutation, nous eussions obtenu pour solution l'équation

$$(63) \qquad \int \sqrt{\frac{F(\psi)}{\Psi(\psi)}} \frac{d\psi}{\sqrt{C_1^2 \Psi(\psi) - 1}} \mp \int \sqrt{\Phi(\varphi)}\, d\varphi = C'$$

Digitized by Google

déduite de la formule (61), en y effectuant les mêmes permutations.

La solution dans ce second cas appartiendra donc à deux types différents, suivant le signe que l'on devra adopter devant la seconde intégrale.

III° Examinons enfin le cas où les dérivées $\frac{lH_i}{\psi}$ et $\frac{lK_i}{\varphi}$ n'étant nulles ni l'une ni l'autre, ces dérivées sont proportionnelles à deux fonctions quelconques l'une de $\psi$ et l'autre de $\varphi$, c'est-à-dire, en d'autres termes, le cas où l'on a

$$\frac{\frac{lH_i}{\psi}}{\Psi_i'(\psi)} = \frac{\frac{lK_i}{\varphi}}{-\Phi_i'(\varphi)} = \frac{1}{\omega}, \tag{64}$$

en désignant par $\Phi_i'$ et $\Psi_i'$ deux fonctions complètement arbitraires d'une seule variable, et représentant provisoirement par $\omega$ la valeur inverse de ces rapports dont nous nous réservons de préciser un peu plus loin l'expression. Tirant alors de ces relations (64) les valeurs

$$\frac{lH_i}{\psi} = \frac{1}{\omega}\Psi_i'(\psi), \qquad \frac{lK_i}{\varphi} = -\frac{1}{\omega}\Phi_i'(\varphi),$$

et la reportant dans l'équation proposée (53), elle deviendra, en multipliant en même temps par $\omega$ :

$$\omega(u^2 dv^2 - v^2 du^2) = (u^2 + v^2)\left[u^2\Psi_i'(\psi)d\psi + v^2\Phi_i'(\varphi)d\varphi\right].$$

Sous cette forme, reconnaissant dans le second facteur du second membre la moitié des termes de la différentielle de l'expression $\Psi_1(\psi)u^2 + \Phi_1(\varphi)v^2$, à la seule condition de poser

$$\int\Psi_i'(\psi)d\psi = \Psi_i(\psi) \qquad \text{et} \qquad \int\Phi_i'(\varphi)d\varphi = \Phi_i(\varphi),$$

on est amené à compléter cette différentielle en ajoutant aux

Digitized by Google

deux membres le produit $(u^2+v^2)\,[\Psi_1(\psi)\,d.u^2+\Phi_1(\varphi)\,d.v^2]$, ce qui permettra d'écrire ainsi l'équation :

$$(u^2+v^2)\big[\Psi_1(\psi)d.u^2+\Phi_1(\varphi)d.v^2\big]+\omega(u^2d.v^2-v^2d.u^2)$$
$$=(u^2+v^2)\big[\Psi_1(\psi)d.u^2+\Phi_1(\varphi)d.v^2+u^2.\Psi_1'(\psi)\,d\psi+v^2.\Phi_1'(\varphi)d\varphi\big],$$

ou en ordonnant, et rapprochant les termes convenables :

$$\big[\Psi_1(\psi)u^2+(\Psi_1(\psi)-\omega)v^2\big]d.u^2+\big[(\Phi_1(\varphi)+\omega)u^2+\Phi_1(\varphi)v^2\big]d.v^2$$
$$=(u^2+v^2)d\big[\Psi_1(\psi)u^2+\Phi_1(\varphi)v^2\big].$$

Dès lors on voit qu'il suffira de poser

$$\omega=\Psi_1(\psi)-\Phi_1(\varphi) \tag{65}$$

d'où

$$\Psi_1(\psi)-\omega=\Phi_1(\varphi)\qquad\text{et}\qquad\Phi_1(\varphi)+\omega=\Psi_1(\psi),$$

pour que cette dernière équation puisse s'écrire, en faisant passer tous les termes dans le premier membre,

$$\big[\Psi_1(\psi)u^2+\Phi_1(\varphi)v^2\big].d(u^2+v^2)-(u^2+v^2).d\big[\Psi_1(\psi)u^2+\Phi_1(\varphi)v^2\big]=0,$$

et son premier membre ayant dès lors la forme simple $U\,dV-V\,dU$, elle deviendra immédiatement intégrable en la divisant simplement par $V^2$ ou $(u^2+v^2)^2$, et conduira ainsi à l'intégrale première

$$\frac{\Psi_1(\psi)u^2+\Phi_1(\varphi)v^2}{u^2+v^2}=-C_1, \tag{66}$$

ou en chassant le dénominateur, ordonnant, et remplaçant $u^2$ et $v^2$ par leurs valeurs réelles ou conventionnelles :

$$\big[\Psi_1(\psi)+C_1\big]Hd\varphi^2=-\big[\Phi_1(\varphi)+C_1\big]Kd\psi^2. \tag{67}$$

Donc en résumé, toutes les fois que l'on aura entre les quantités $H_1$ et $K_1$ les relations (64), où $\omega$ a la valeur (65), ou bien,

Digitized by Google

en d'autres termes, toutes les fois que $H_1$ et $K_1$ vérifieront simultanément les conditions

$$\frac{\frac{\partial H_1}{\partial \psi}}{\Psi_1'(\psi)} = \frac{\frac{\partial K_1}{\partial \varphi}}{-\Phi_1'(\varphi)} = \frac{1}{\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)},$$

c'est-à-dire chacune séparément les équations

$$\frac{\partial H_1}{\partial \psi} = \frac{\Psi_1'(\psi)}{\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)}, \qquad \frac{\partial K_1}{\partial \varphi} = \frac{\Phi_1'(\varphi)}{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)},$$

ou, ce qui est la même chose, en intégrant,

$$(68) \qquad H_1 = \Phi_2(\varphi)\left[\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)\right], \qquad K_1 = \Psi_1(\psi)\left[\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)\right],$$

$\Phi_2$ et $\Psi_2$ désignant deux nouvelles fonctions arbitraires, toutes les fois, disons-nous, que ces conditions seront remplies, ou, en d'autres termes, que $H_1$ et $K_1$ seront réductibles à la forme (68), l'équation différentielle proposée admettra pour intégrale première l'équation (66) ou (67), que nous venons d'obtenir.

Admettant donc qu'il en soit ainsi, c'est-à-dire supposant que les quantités $H_1$ et $K_1$ aient des expressions de la forme (68), l'intégrale première (67), qui, multipliée par $\mathcal{F} + C$, peut s'écrire, en ayant égard aux définitions (52) de $H_1$ et $K_1$,

$$\left[\Psi_1(\psi) + C_1\right] H_1 d\varphi^2 = -\left[\Phi_1(\varphi) + C_1\right] K_1 d\psi^2,$$

deviendra, en y substituant à la place de $H_1$ et $K_1$ ces expressions (68), et supprimant le facteur commun $\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)$,

$$\left[\Psi_1(\psi) + C_1\right] \Phi_2(\varphi) d\varphi^2 = \left[\Phi_1(\varphi) + C_1\right] \Psi_2(\psi) d\psi^2,$$

ou, en séparant les variables, et extrayant les racines,

$$(69) \qquad \sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi) + C_1}}\, d\varphi = \mp \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi) + C_1}}\, d\psi,$$

et donnera, par conséquent, à l'aide de simples quadratures, pour

Digitized by Google

intégrale générale l'une ou l'autre des deux solutions renfermées dans la formule

$$(70)\qquad \int \sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C_1}}\,d\varphi \pm \int \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C_1}}\,d\psi = C',$$

suivant le signe que l'on sera conduit à adopter pour le second radical, dans l'équation immédiatement précédente. La solution dans ce cas encore appartiendra donc à deux types distincts, correspondant chacun à l'un des signes de ce radical.

On aperçoit sans peine que le résultat que nous venons d'obtenir pour ce troisième cas, et les hypothèses (68) qui nous y ont conduits, comprennent, comme cas particuliers, respectivement les résultats et les hypothèses correspondantes relatives aux deux premiers cas, savoir ceux du cas II en supposant que l'une des deux fonctions $\Phi_1$ ou $\Psi_1$ se réduise à une constante, et ceux du cas I en supposant qu'elles s'y réduisent toutes les deux simultanément. On pourrait donc se contenter de conserver seulement ces dernières formules (68) et (70), en faisant abstraction des formules relatives aux deux cas précédents. Nous avons dû toutefois établir celles-ci séparément, attendu que les raisonnements, dont nous avons fait usage pour arriver à la solution (70), ne subsistent plus avec les hypothèses des cas I et II. Les calculs relatifs aux deux premiers cas préparent d'ailleurs par une gradation naturelle des difficultés, les calculs plus compliqués qui nous ont fourni la solution relative à ce troisième cas.

Conditions et formules de réduction du problème aux quadratures. — Nous présenterons, dans le paragraphe suivant, un grand nombre d'exemples de ces méthodes d'intégration, pour le cas particulier où la force est supposée nulle; avant d'en donner également quatre exemples relatifs au cas général, savoir celui où il y a une force extérieure donnée, il importe de bien préciser l'étendue de leur champ d'application, c'est-à-dire de spécifier nettement les conditions qui devront être remplies

Digitized by Google

séparément par la surface donnée d'une part, et par la force extérieure de l'autre, pour que ces méthodes soient applicables.

A cet effet nous remarquerons en premier lieu que les hypothèses du cas III, qui comprennent celles des deux cas précédents, comme nous venons de le dire, exigent tout d'abord une condition qui devra être satisfaite par la surface donnée, quelle que soit la force que l'on suppose appliquée au point matériel; à savoir que les quantités H et K relatives à cette surface, qu'on pourra toujours calculer par les formules (37), en partant soit des équations (15), soit des équations (36), soient proportionnelles à deux fonctions arbitraires l'une de $\varphi$, l'autre de $\psi$, car les conditions (68), en y remplaçant $H_1$ et $K_1$ par leurs valeurs de définition (52), peuvent évidemment être mises sous la forme :

$$(71) \qquad \frac{H}{\Phi_2(\varphi)} = \frac{K}{-\Psi_2(\psi)} = \frac{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)}{\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C}.$$

Il y a lieu dès lors d'examiner successivement les deux cas subsidiaires suivants :

1° *Surfaces isothermes.* — Cette première condition (71), qu'on pourrait croire assez restrictive, laisse par le fait une fort grande latitude pour le choix de la surface, attendu qu'elle sera toujours remplie pour toute surface isotherme susceptible de faire partie d'un système orthogonal, et l'on sait combien est vaste la catégorie de ces dernières surfaces. Nous verrons, en effet, à la fin du paragraphe suivant, que pour tout système triplement isotherme, l'expression des quantités H et K relatives à la surface considérée sera de la forme

$$(72) \qquad H = \Phi_2(\varphi)\big[\Phi(\psi) - \Psi(\psi)\big], \qquad K = \Psi_2(\psi)\big[\Psi(\psi) - \Phi(\varphi)\big],$$

et satisfera par conséquent à la condition que nous venons de dire.

Admettant donc cette première condition comme remplie, et supposant dès lors que les fonctions $\Phi_2$ et $\Psi_2$ qui entrent dans l'expression (68) des quantités $H_1$ et $K_1$ soient précisément celles-

Digitized by Google

là mêmes qui figurent dans l'expression de H et de K qui précède, on voit, en substituant ces valeurs (72) dans l'équation précédente (71), que la fonction des forces $\mathcal{F}$ devra satisfaire en outre à la condition suivante, dans laquelle, les fonctions $\Phi$ et $\Psi$ étant déterminées par la constitution du système, les fonctions $\Phi_1$ et $\Psi_1$ restent, elles, complètement arbitraires, savoir

$$\Phi(\varphi) - \Psi(\psi) = \frac{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)}{\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C}$$

ou

$$\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C = \frac{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)}{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}, \tag{73}$$

condition que l'on peut écrire encore sous forme plus simple

$$\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) = \frac{\Phi_2(\varphi) - \Psi_2(\psi)}{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)},$$

en représentant par $\Phi_2(\varphi)$ et $\Psi_2(\psi)$ les deux fonctions arbitraires $\Phi_1(\varphi) + C\Phi(\varphi)$ et $\Psi_1(\psi) + C\Psi(\psi)$.

Cette dernière condition sera d'ailleurs seule suffisante, lorsque la surface donnée sera susceptible de faire partie d'un système orthogonal triplement isotherme, car les conditions (72) étant alors remplies, comme nous l'avons dit, l'ensemble des valeurs (72) et (73) redonnent pour $H_1$ et $K_1$, d'après les définitions (52), précisément les expressions (68).

Nous plaçant donc en ce moment dans ce cas particulier d'une surface isothèrme donnée, pour intégrer l'équation des forces vives (11), ou

$$dt^2 = \frac{1}{2} \frac{H d\varphi^2 + K d\psi^2}{\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C},$$

laquelle peut s'écrire alors, en multipliant au second membre haut et bas par $\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C$, et tenant compte des valeurs (68) de $H_1$ et $K_1$,

$$dt^2 = \frac{1}{2} \frac{H_1 d\varphi^2 + K_1 d\psi^2}{[\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C]^2} = \frac{1}{2} \frac{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)}{[\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C]^2} \left[\Phi_2(\varphi) d\varphi^2 - \Psi_2(\psi) d\psi^2\right], \tag{74}$$

Digitized by Google

nous introduirons pour un instant une variable auxiliaire $u$ (que nous aurons soin de ne pas confondre avec la composante de la vitesse désignée jusqu'ici par la même lettre), en égalant à $du$ chacun des deux membres de l'intégrale première (69), c'est-à-dire en posant

$$(75) \qquad \sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C_1}}\,d\varphi = \mp\sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C_1}}\,d\psi = du,$$

puis nous tirerons de là successivement

$$(75^{bis}) \quad \begin{cases} \Phi_2(\varphi)d\varphi^2 = [\Phi_1(\varphi)+C_1]du^2, \qquad \Psi_2(\psi)d\psi^2 = [\Psi_1(\psi)+C_1]du^2, \\ \Phi_2(\varphi)d\varphi^2 - \Psi_2(\psi)d\psi^2 = [\Phi_1(\varphi)-\Psi_1(\psi)]du^2, \end{cases}$$

et en substituant ensuite dans l'équation précédente (74), elle deviendra simplement

$$dt^2 = \frac{1}{2}\frac{[\Phi_1(\varphi)-\Psi_1(\psi)]^2}{[\mathcal{F}(\varphi,\psi,\varpi)+C]^2}\,du^2,$$

ou en extrayant les racines, puis ayant égard à notre hypothèse (73),

$$(75^{ter}) \qquad dt = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Phi_1(\varphi)-\Psi_1(\varphi)}{\mathcal{F}(\varphi,\psi,\varpi)+C}du = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)]du,$$

ou enfin, en remplaçant $du$ dans chacun des termes du dernier membre successivement par ses deux valeurs de définition (75),

$$dt = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C_1}}\Phi(\varphi)d\varphi \pm \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C_1}}\Psi(\psi)d\psi\right],$$

équation qui s'intégrera comme l'intégrale première (69) à l'aide de simple quadrature, en ayant soin de se rappeler que, le double signe qui figure dans l'intérieur de la parenthèse étant introduit par l'équation (75) ou (69), les signes que l'on devra prendre dans l'équation intégrale pour chacun des deux radicaux correspondront exactement à ceux de l'équation (70), le signe qu'il

Digitized by Google

faudra prendre ensuite devant la parenthèse étant alors déterminé par la condition primordiale que la valeur de $t$ qui en résultera soit positive.

En résumé donc pour ce premier sous-cas, lorsque les fonctions $H_1$, $K_1$, et $\mathcal{F} + C$, auront des expressions de la forme

$$(76)\quad \begin{cases} H = \Phi_2(\rho)[\Phi(\rho) - \Psi(\psi)], \qquad K = \Psi_2(\psi)[\Psi(\psi) - \Phi(\rho)] \\ \mathcal{F}(\rho, \psi, \varpi) + C = \dfrac{\Phi_1(\rho) - \Psi_1(\psi)}{\Phi(\rho) - \Psi(\psi)}, \end{cases}$$

lesquelles satisfont elles-mêmes pour $H_1$ et $K_1$ aux conditions (68), les inconnues $\varphi$ et $\psi$ seront déterminées complètement en fonction du temps par les deux équations

$$(77)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \sqrt{\frac{\Phi_2(\rho)}{\Phi_1(\rho) + C_1}}\, d\rho \pm \int \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi) + C_1}}\, d\psi = C' \\ \displaystyle\int \sqrt{\frac{\Phi_2(\rho)}{\Phi_1(\rho) + C_1}}\, \Phi(\rho) d\rho \pm \int \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi) + C_1}}\, \Psi(\psi) d\psi = \pm \sqrt{2}(t + C'') \end{cases}$$

(le choix qu'il faudra faire pour chacun des doubles signes étant subordonné aux conditions que nous venons de dire), après toutefois que l'on aura exprimé en fonction des données initiales $\varphi_0$, $\psi_0$, $u_0$, $v_0$, les quatre constantes C, $C_1$, C', C'', car la constante C figure implicitement dans ces équations par les fonctions $\Phi_1$ et $\Psi_1$, ainsi qu'il résulte nécessairement de l'hypothèse (73).

Cette détermination peut d'ailleurs s'opérer très simplement en général de la façon suivante. Pour obtenir tout d'abord les valeurs des constantes C et $C_1$, il suffira de se reporter aux équations qui les définissent, c'est-à-dire à l'équation des forces vives (12), et à l'intégrale première (66), lesquelles étant prises l'une et l'autre pour l'instant initial, donnent séparément, pour la valeur de C

$$(78)\qquad C = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) - \mathcal{F}(\rho_0, \psi_0, \varpi),$$

Digitized by Google

et pour la valeur de $C_1$ :

(79) $$C_1 = -\frac{\Psi_1(\psi_0)u_0^2 + \Phi_1(\varphi_0)v_0^2}{u_0^2 + v_0^2} \quad (*).$$

---

(*) Dans le cas particulier où l'on supposerait nulle la vitesse initiale, cette expression de $C_1$ prendrait la forme $\frac{0}{0}$. Il faut alors opérer comme il suit :

Différentiant deux fois de suite par rapport au temps la première équation (77), ou ce qui revient au même, une fois l'intégrale première (69), préalablement divisée par $dt$, et y faisant ensuite $t = 0$, on trouvera

$$\sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi_0)}{\Phi_1(\varphi_0) + C_1}}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0 \pm \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi_0)}{\Psi_1(\psi_0) + C_1}}\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)_0 = 0,$$

car les termes qui contiennent les dérivées premières $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$ disparaîtront lorsqu'on fera $t = 0$, en vertu des valeurs (4) qui donnent $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = (\Delta_1\varphi)_0 u_0 = 0$, et $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = (\Delta_1\psi)_0 v_0 = 0$ ; séparant donc en deux membres, et élevant au carré, ce qui donne

$$\frac{\Phi_2(\varphi_0)}{\Phi_1(\varphi_0) + C_1}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0^2 = \frac{\Psi_2(\psi_0)}{\Psi_1(\psi_0) + C_1}\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)_0^2,$$

nous y remplacerons $\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0^2$ et $\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)_0^2$ par leurs valeurs tirées des deux premières équations du mouvement (9), lesquelles se réduisent pour $t = 0$, à

$$H_0\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0 = \left(H^{\frac{1}{2}}U\right)_0 = \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0, \qquad K_0\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)_0 = \left(K^{\frac{1}{2}}V\right)_0 = \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0,$$

en ayant égard aux valeurs (50), et donneront par conséquent, en tenant compte des expressions (72) de H et de K :

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0^2 = \frac{\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2}{H_0^2} = \frac{\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2}{\Phi_2(\varphi_0)^2\left[\Phi(\varphi_0) - \Psi(\psi_0)\right]^2},$$

$$\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)_0^2 = \frac{\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2}{K_0^2} = \frac{\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2}{\Psi_2(\psi_0)^2\left[\Phi(\varphi_0) - \Psi(\psi_0)\right]^2}.$$

Par cette substitution, l'équation qui précède deviendra, en simplifiant, chassant les dénominateurs, et supprimant le facteur $[\Phi(\varphi_0) - \Psi(\psi_0)]^2$,

$$\Psi_2(\psi_0)\left[\Psi_1(\psi_0) + C_1\right]\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2 = \Phi_2(\varphi_0)\left[\Phi_1(\varphi_0) + C_1\right]\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2,$$

d'où l'on tirera par conséquent dans ce cas particulier, pour $C_1$ la valeur :

(A) $$C_1 = -\frac{\Psi_1(\psi_0)\Psi_2(\psi_0)\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2 - \Phi_1(\varphi_0)\Phi_2(\varphi_0)\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2}{\Psi_2(\psi_0)\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2 - \Phi_2(\varphi_0)\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2}$$

Digitized by Google

Toutefois la dernière de ces deux expressions contenant en général la constante C par les fonctions $\Phi_1$ et $\Psi_1$, ainsi que nous venons de le faire observer, ne fournira l'expression définitive de $C_1$ en fonction des données initiales, qu'après que l'on y aura remis à la place de C la valeur (78) que l'on vient de trouver.

Puis les valeurs de C et $C_1$ ainsi obtenues étant supposées reportées dans les équations (77), pour déterminer les deux autres constantes C' et C'', il n'y aura qu'à faire $t = 0$, dans les deux équations (77), et les deux valeurs ainsi obtenues devront être remises à la place de C' et C'' dans les mêmes équations, opération qui revient dès lors à éliminer ces deux arbitraires par soustraction, et dont le résultat peut s'indiquer à l'aide de la notation des intégrales définies ainsi qu'il suit

$$(80)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C_1}}\,d\varphi \pm \int_{\psi_0}^{\psi} \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C_1}}\,d\psi = 0, \\ \displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C_1}}\,\Phi(\varphi)\,d\varphi \pm \int_{\varphi_0}^{\psi} \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C_1}}\,\Psi(\psi)\,d\psi = \pm\sqrt{2}.t, \end{array}\right.$$

équations qui constitueront dès lors, C et $C_1$ représentant les valeurs (78) et (79), la solution complète et définitive du problème proposé.

Remarquons enfin, avant de passer au cas suivant, que l'équation de la trajectoire étant ainsi supposée obtenue, à l'aide de simples quadratures, sous forme d'une équation finie entre les deux coordonnées $\varphi$ et $\psi$, nos formules (29) dans l'hypothèse d'un système orthogonal, ou plus généralement nos formules (35), (46) et (47), nous permettront aisément la détermination en grandeur et direction du rayon de courbure de cette trajectoire, à l'aide de simples différentiations, c'est-à-dire par le moyen de formules dans lesquelles n'entreront que les seules fonctions $\Phi$, $\Psi$, $\Phi_1$, $\Psi_1$, $\Phi_2$, $\Psi_2$, qui figurent dans les hypothèses (86), et leurs dérivées, sans aucune intégration. Cette détermination étant

Digitized by Google

toutefois d'importance secondaire, nous nous contenterons d'en indiquer ici les résultats, qui consistent dans les formules suivantes : à savoir, pour les deux premières composantes U et V de la courbure

$$(80^{bis})\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{U}{\sqrt{-(\Psi_1+C_1)}} = \frac{V}{\sqrt{\Phi_1+C_1}} = \frac{1}{2(\Phi_1-\Psi_1)^2}\Bigg[ & H^{-\frac{1}{2}}\left\{\Phi_1'+(\Psi_1-\Phi_1)\frac{lK}{\varphi}\right\}\sqrt{-(\Psi_1+C_1)} \\ & + K^{-\frac{1}{2}}\left\{\Psi_1'+(\Phi_1-\Psi_1)\frac{lH}{\psi}\right\}\sqrt{\Phi_1+C_1}\Bigg], \end{aligned} \right.$$

et pour la troisième composante W

$$(80^{ter})\qquad W = -\frac{1}{2}\frac{J^{-\frac{1}{2}}}{\Phi_1-\Psi_1}\left[\frac{lH}{\varpi}(\Phi_1+C_1) - \frac{lK}{\varpi}(\Psi_1+C_1)\right],$$

dans l'hypothèse d'un système orthogonal, ou plus généralement

$$W = \frac{1}{\Phi_1-\Psi_1}\left[\frac{1}{R'}(\Phi_1+C_1) - \frac{1}{R''}(\Psi_1+C_1)\right],$$

R′ et R″ désignant toujours les deux rayons de courbure principaux de la surface donnée, si l'on n'impose aucune condition à cette surface; et nous reporterons en appendice (voir la note III) à la fin du Mémoire, les calculs simples et faciles qui conduisent à ces formules.

Nous donnerons tout à l'heure quelques exemples d'application de ces formules, en résolvant par leur moyen notamment deux problèmes simples, absolument rebelles à l'emploi des coordonnées classiques.

2° *Surfaces non isothermes.* — Dans le cas où la surface donnée n'étant pas isotherme ne pourrait être rattachée à un système triplement isotherme, supposons que les quantités H et K relatives à cette surface aient des expressions de la forme

$$(81)\qquad H = \Phi_1(\varphi)\Psi_1(\psi)\Omega, \qquad K = \Phi_2(\varphi)\Psi_2(\varphi)\Omega,$$

(en désignant par Ω une fonction quelconque des deux variables φ et ψ, $\Omega = f(\varphi, \psi)$) lesquelles expressions satisfont encore à la



Digitized by Google

condition sus-énoncée qu'exprime la première des équations (71) (où les fonctions $\Phi_2$ et $\Psi_2$ représentant deux fonctions arbitraires quelconques, ne sont pas par hypothèse les mêmes qui figurent dans l'expression (81) de K), car on a de même avec ces valeurs :

$$\frac{H}{K} = \frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\frac{\Psi_1(\psi)}{\Psi_2(\psi)} = \frac{\left(\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\right)}{\left(\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}\right)} \qquad \text{ou} \qquad \frac{H}{\left(\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\right)} = \frac{K}{\left(\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}\right)}.$$

Pour que les conditions d'intégration exprimées par les équations (68) soient vérifiées, c'est-à-dire pour que les quantités $H_1$ et $K_1$ aient des expressions de la forme

$$(82) \qquad H_1 = \Phi_3(\varphi)\left[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)\right], \qquad K_1 = \Psi_3(\psi)\left[\Psi(\psi) - \Phi(\varphi)\right]$$

(en écrivant $\Phi$ et $\Psi$ à la place de $\Phi_1$ et $\Psi_1$, et $\Phi_3$ et $\Psi_3$ au lieu de $\Phi_2$ et $\Psi_2$, afin de prévenir la confusion des notations), ayant alors par les hypothèses (81)

$$\begin{cases} H_1 = H(\mathcal{F} + C) = \Phi_1(\varphi)\,\Psi_1(\psi)\,\Omega(\mathcal{F} + C), \\ K_1 = K(\mathcal{F} + C) = \Phi_2(\varphi)\,\Psi_2(\psi)\,\Omega(\mathcal{F} + C), \end{cases}$$

il faudra que l'on ait

$$\begin{cases} \Phi_1(\varphi)\,\Psi_1(\psi)\,\Omega(\mathcal{F} + C) = \Phi_3(\varphi)\left[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)\right], \\ \Phi_2(\varphi)\,\Psi_2(\psi)\,\Omega(\mathcal{F} + C) = \Psi_3(\psi)\left[\Psi(\psi) - \Phi(\varphi)\right], \end{cases}$$

ou

$$(83) \qquad \frac{\Phi_1(\varphi)\,\Psi_1(\psi)}{\Phi_3(\varphi)} = \frac{\Phi_2(\varphi)\,\Psi_2(\psi)}{-\Psi_3(\psi)} = \frac{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}{\Omega(\mathcal{F} + C)}.$$

Or la première de ces conditions équivalant à l'égalité des deux rapports

$$\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)\ \Phi_3(\varphi)} = \frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)\,\Psi_3(\psi)} = c,$$

dont le premier ne contient que $\varphi$, pendant que le second ne contient que $\psi$, montre que la valeur commune $c$ de ces deux rapports est une constante.

Digitized by Google

Tirant donc de là

$$(84) \qquad \Phi_3(\varphi) = \frac{1}{c}\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}, \qquad \Psi_3(\psi) = \frac{1}{c}\frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)},$$

et substituant dans les égalités (83), elles se réduiront à la seule condition

$$c\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi) = \frac{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}{\Omega(\mathcal{F} + C)} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{F} + C = \frac{\frac{1}{c}\left[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)\right]}{\Omega\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi)},$$

ou simplement

$$(85) \qquad \mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C = \frac{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}{\Omega\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi)},$$

en écrivant $c\Phi$ et $c\Psi$ à la place de $\Phi$ et de $\Psi$, condition qui sera ainsi la seule nécessaire et suffisante, étant données les hypothèses (81), pour que les conditions d'intégration (68) ou (82) soient satisfaites.

Supposant donc cette condition remplie, l'intégrale première (69), qui est avec le changement de notation dont nous sommes convenus un peu plus haut (page précédente *in medio*)

$$\sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi(\varphi) + C_1}}\, d\varphi = \mp \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi(\psi) + C_1}}\, d\psi,$$

deviendra par les valeurs (84)

$$(86) \qquad \sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi) + C_1}} = \mp \sqrt{\frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}}\frac{d\psi}{\sqrt{\Psi(\psi) + C_1}},$$

et fournira par conséquent, pour équation de la trajectoire dans le cas actuel :

$$(87) \qquad \int \sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi) + C_1}} \pm \int \sqrt{\frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}}\frac{d\psi}{\sqrt{\Psi(\psi) + C_1}} = C'.$$

Dans les mêmes circonstances, l'intégration de l'équation des forces vives pourra également être ramenée aux quadratures de

Digitized by Google

la façon suivante. L'ayant mise comme tout à l'heure, sous la forme

$$dt^2 = \frac{1}{2}\frac{H_1 d\varphi^2 + K_1 d\psi^2}{[\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C]^2},$$

et substituant les valeurs de $H_1$ et de $K_1$, qui sont dans le cas actuel, en introduisant les hypothèses (81) et (85) dans les expressions (52),

$$\begin{cases} H_1 = \Phi_1(\varphi)\Psi_1(\psi)\Omega\dfrac{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}{\Omega\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi)} = \dfrac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\big[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)\big] \\ K_1 = \Phi_2(\varphi)\Psi_2(\psi)\Omega\dfrac{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}{\Omega\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi)} = \dfrac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}\big[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)\big], \end{cases}$$

cette équation deviendra :

$$(88) \qquad dt^2 = \frac{1}{2}\frac{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}{(\mathcal{F} + C)^2}\left[\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}d\varphi^2 + \frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}d\psi^2\right].$$

Or si nous égalons comme tout à l'heure à $du$ chacun des membres de l'intégrale première (86), c'est-à-dire si nous posons

$$(89) \qquad \sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi) + C_1}} = \mp\sqrt{\frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}}\frac{d\psi}{\sqrt{\Psi(\psi) + C_1}} = du,$$

nous en tirerons de même

$$\begin{cases} \dfrac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}d\varphi^2 = \big(\Phi(\varphi) + C_1\big)du^2, \qquad \dfrac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}d\psi^2 = \big(\Psi(\psi) + C_1\big)du^2, \\ \dfrac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)}d\varphi^2 + \dfrac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}d\psi^2 = \big[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)\big]du^2, \end{cases}$$

et en substituant dans l'équation des forces vives (88), celle-ci deviendra simplement

$$dt^2 = \frac{1}{2}\frac{[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)]^2}{(\mathcal{F} + C)^2}du^2,$$

ou en extrayant les racines, puis ayant égard à l'hypothèse (85),

$$dt = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}{\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C}du = \pm\frac{\Omega}{\sqrt{2}}\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi)du;$$

Digitized by Google

équation qui pourra s'écrire, en remplaçant *du* successivement par ses deux valeurs de définition (89), sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\left\{\begin{array}{l} dt = \pm\dfrac{\Omega}{\sqrt{2}}\Psi_1(\psi)\,\Phi_2(\varphi)\sqrt{\dfrac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}}\dfrac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi)+C_1}} = \pm\dfrac{\Omega}{\sqrt{2}}\Psi_1(\psi)\sqrt{\dfrac{\Phi_1(\varphi)\Phi_2(\varphi)}{\Phi(\varphi)+C_1}}\,d\varphi \\ dt = \mp\dfrac{\Omega}{\sqrt{2}}\Phi_2(\varphi)\,\Psi_1(\psi)\sqrt{\dfrac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}}\dfrac{d\psi}{\sqrt{\Psi(\psi)+C_1}} = \mp\dfrac{\Omega}{\sqrt{2}}\Phi_2(\varphi)\sqrt{\dfrac{-\Psi_1(\psi)\Psi_2(\psi)}{\Psi(\psi)+C_1}}\,d\psi, \end{array}\right.$$

lesquelles s'intégreront l'une et l'autre par quadrature, après que l'on aura remplacé simplement, pour la première, dans $\Omega\Psi_1$, $\psi$ par sa valeur en fonction de $\varphi$ tirée de l'équation de la trajectoire (87), ou pour la seconde, dans $\Omega\Phi_2$, $\varphi$ par sa valeur en fonction de $\psi$, tirée de cette même équation.

Si pour symboliser cette opération, nous convenons de représenter par $(\Omega\Psi_1)_\varphi$, $(\Omega\Phi_2)_\psi$ le résultat de ces substitutions, on voit ainsi pour le second sous-cas, qu'en résumé, lorsque les trois quantités H, K, et $\mathcal{F}+C$, auront des expressions de la forme

$$(90)\qquad \left\{\begin{array}{l} H = \Phi_1(\varphi)\Psi_1(\psi)\Omega, \qquad K = \Phi_2(\varphi)\Psi_2(\psi)\Omega \\ \mathcal{F}(\varphi,\psi,\varpi)+C = \dfrac{\Phi(\varphi)-\Psi(\varphi)}{\Omega\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi)}, \end{array}\right.$$

$\Omega$, $\Phi$, $\Psi$, $\Phi_1$, $\Psi_1$, $\Phi_2$, $\Psi_2$, représentant sept fonctions arbitraires quelconques, la solution complète du problème sera fournie par les deux équations

$$(91)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int\sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi)+C_1}} \pm \int\sqrt{\frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}}\frac{d\psi}{\sqrt{\Psi(\psi)+C_1}} = C, \\ \text{et} \\ \displaystyle\pm\int(\Omega\Psi_1)_\varphi\sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi)\Phi_2(\varphi)}{\Phi(\varphi)+C_1}}\,d\varphi = \sqrt{2}(t+C''), \\ \text{ou bien} \\ \displaystyle\mp\int(\Omega\Phi_2)_\psi\sqrt{\frac{-\Psi_1(\psi)\Psi_2(\psi)}{\Psi(\psi)+C_1}}\,d\psi = \sqrt{2}(t+C''), \end{array}\right.$$

Digitized by Google

en tenant compte des mêmes observations pour les doubles signes et pour les constantes que dans le cas précédent.

La détermination des constantes C et $C_1$ s'effectuera d'ailleurs exactement de la même manière que dans ce premier cas, à l'aide de l'équation des forces vives (12), et de l'intégrale première (66), sauf qu'il faut se souvenir que nous avons changé de notation, pour traiter le cas actuel, et que nous sommes convenus d'écrire dans les formules du cas III, partout $\Phi$ et $\Psi$ à la place de $\Phi_1$, et $\Psi_1$, d'où par conséquent pour C et $C_1$, encore les deux valeurs : (*)

$$(92)\qquad C=\frac{1}{2}(u_0^2+v_0^2)-\mathcal{F}(\varphi_0,\psi_0,\varpi),\qquad C_1=-\frac{\Psi(\psi_0)u_0^2+\Phi(\varphi_0)v_0^2}{u_0^2+v_0^2}.$$

Puis ces valeurs de C et de $C_1$ étant supposées reportées dans les équations (91), les deux autres constantes C′ et C″ se détermineront encore en faisant simplement $t=0$, dans les mêmes équations.

Enfin, comme dans le cas précédent, si l'on applique à l'équation de la trajectoire que nous venons d'obtenir (la première équation (91)) nos formules (29), ou (35) et (46), en même temps

---

(*) On déduira également la valeur de $C_1$, pour le cas particulier où la vitesse initiale era supposée nulle, de celle (A) obtenue dans le cas précédent, pour la même hypothèse, en se souvenant que pour traiter le cas actuel, nous avons d'abord écrit $\Phi$ et $\Psi$ à la place de $\Phi_1$, $\Psi_1$, et $\Phi_2$, $\Psi_2$ au lieu de $\Phi_2$, $\Psi_2$ dans les formules du cas III, ce qui change tout d'abord cette valeur (page 59, en note, *in fine*) dans celle-ci

$$C_1=-\frac{\Psi(\psi_0)\Psi_2(\psi_0)\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2-\Phi(\varphi_0)\Phi_2(\varphi_0)\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2}{\Psi_2(\psi_0)\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2-\Phi_2(\varphi_0)\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2},$$

puis remplaçant ensuite les fonctions $\Phi_2$ et $\Psi_2$ par les expressions (84) que nous leur avons substituées dans le cas actuel, nous aurons définitivement, en multipliant haut et bas par $\Psi_1(\psi_0)\Phi_2(\varphi_0)$ pour les valeurs de $C_1$ dans l'hypothèse précitée :

$$(\mathbf{B})\qquad C_1=-\frac{\Psi(\psi_0)\Phi_2(\varphi_0)\Psi_2(\psi_0)\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2+\Phi(\varphi_0)\Phi_1(\varphi_0)\Psi_1(\psi_0)\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2}{\Phi_2(\varphi_0)\Psi_2(\psi_0)\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2+\Phi_1(\varphi_0)\Psi_1(\psi_0)\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2}.$$

Digitized by Google

que les formules (47) à l'équation de la surface, supposée mise sous la forme (36), on arrivera sans peine pour déterminer en grandeur et en direction le rayon de courbure de cette trajectoire en un point quelconque, aux formules suivantes, qui ne diffèrent des formules (80$^{bis}$) et (80$^{ter}$) que par le changement de $\Phi_1$, $\Psi_1$ en $\Phi$ et $\Psi$, et pour la démonstration desquelles nous renverrons encore à la note III de l'appendice qui termine ce Mémoire; savoir, pour les deux premières composantes de la courbure

$$(92^{bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{U}{\sqrt{-(\Psi+C_1)}} = \frac{V}{\sqrt{\Phi+C_1}} = \frac{1}{2(\Phi-\Psi)^2} \Bigg[ & H^{-\frac{1}{2}} \left\{ \Phi' + (\Psi-\Phi) \frac{lK}{\varphi} \right\} \sqrt{-(\Psi+C_1)} \\ & + K^{-\frac{1}{2}} \left\{ \Psi' + (\Phi-\Psi) \frac{lH}{\psi} \right\} \sqrt{\Phi+C_1} \Bigg], \end{aligned} \right.$$

et pour la troisième composante l'une ou l'autre des deux suivantes

$$(92^{ter}) \quad \left\{ \begin{aligned} & W = -\frac{1}{2} \frac{J^{-\frac{1}{2}}}{\Phi-\Psi} \left[ \frac{lH}{\varpi} (\Phi + C_1) - \frac{lK}{\varpi} (\Psi + C_1) \right], \\ & \text{ou bien} \\ & W = \frac{1}{\Phi-\Psi} \left[ \frac{1}{R'} (\Phi + C_1) - \frac{1}{R''} (\Psi + C_1) \right], \end{aligned} \right.$$

suivant que l'on supposera ou non la surface donnée rattachée à un système triple orthogonal.

Nous présenterons également un exemple de ce second type de calcul, à propos d'un nouveau problème, que nous croyons encore complètement impossible d'aborder avec les coordonnées usuelles.

Les formules (90) et (91) relatives à ce second cas subsidiaire sont beaucoup plus générales que celles (76) et (77) relatives au cas précédent, et les comprennent en réalité à titre de cas particulier.

On reconnaît aisément en effet que les hypothèses (90) coïncident exactement comme forme avec les hypothèses (76),

Digitized by Google

en y faisant simplement $\Psi_1(\psi) = \text{const.}$, $\Phi_2(\varphi) = \text{const.}$, $\Omega = \Phi(\varphi) - \Psi(\psi)$, et les solutions (77) se déduiraient de même des solutions (91) en y faisant les changements de notation correspondant à ces hypothèses particulières (*). Nous eussions donc pu, à la rigueur, nous contenter d'établir ces dernières seulement, sans prendre la peine de formuler auparavant celles relatives au cas spécial des surfaces isothermes, qu'elles comprennent ainsi comme cas particulier. Nous avons néanmoins jugé utile de le faire pour ces deux motifs : d'abord parce que ce dernier cas est de beaucoup plus fréquent, presque toutes les surfaces que l'on considère habituellement appartenant à la catégorie des surfaces isothermes; puis en second lieu, et surtout, parce que les formules (77) relatives à ce cas sont immédiatement applicables, tandis que les formules générales (91) ne le deviennent qu'après l'une ou l'autre des subsitutions préalables, que nous avons indiquées par les symboles $(\Omega\Psi_1)_\varphi$ et $(\Omega\Phi_2)_\psi$.

Nous exposerons en appendice à la fin du Mémoire (voir la note I), un autre mode d'arriver directement aux mêmes formules générales (91), pour en déduire ensuite les formules (68) et (70) du cas III, procédé qui peut être considéré comme la généralisation de ceux employés pour les cas I et II.

Exemple relatif a l'ellipsoïde. — Comme premier exemple d'application des méthodes que nous venons d'exposer, proposons-nous de déterminer le mouvement d'un point matériel, astreint à rester sur un ellipsoïde donné, et soumis à une force d'attraction ou de répulsion, émanant du centre de cet ellipsoïde, et proportionnelle à la distance.

Pour traiter cette question, nous adopterons le système des coordonnées elliptiques introduit en analyse par Lamé et Jacobi, lequel se compose de trois familles de surfaces du second ordre homofocales, appartenant, la première au genre hyperboloïde à deux nappes, la seconde au genre hyperboloïde à une nappe, et

(*) Au sujet de la concordance de ces résultats, voir en *appendice*, les deux dernières pages à la fin de la note I.

Digitized by Google

la troisième au genre ellipsoïde, surfaces que l'on démontre aisément être orthogonales entre elles. Si l'on désigne par $a^2, b^2, c^2$, trois constantes réelles, supposées rangées dans l'ordre de grandeur $a^2 > b^2 > c^2$, et par $\lambda, \mu, \nu$, les paramètres des trois surfaces, c'est-à-dire les coordonnées elliptiques elles-mêmes, astreintes essentiellement par définition à varier entre les limites suivantes

$$(93) \qquad -a^2 < \lambda < -b^2 < \mu < -c^2 < \nu < +\infty,$$

ce système de coordonnées sera défini par l'un ou l'autre des deux systèmes de formules

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{a^2+\lambda} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} + \dfrac{z^2}{c^2+\lambda} = 1, & x^2 = \dfrac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ \dfrac{x^2}{a^2+\mu} + \dfrac{y^2}{b^2+\mu} + \dfrac{z^2}{c^2+\mu} = 1, & y^2 = \dfrac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ \dfrac{x^2}{a^2+\nu} + \dfrac{y^2}{b^2+\nu} + \dfrac{z^2}{c^2+\nu} = 1, & z^2 = \dfrac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}, \end{array} \right.$$

qui permettent de passer des coordonnées elliptiques aux coordonnées rectilignes, ou inversement, et que l'on trouve établies (par voie de généralisation, pour un nombre $n$ de variables) dans les 26e et 27e des *Vorlesungen über Dynamick* de Jacobi. A ces deux séries de formules nous joindrons celle qu'il donne également pour l'élément d'arc, et qui est la suivante

$$(95) \quad \left\{ \begin{array}{l} ds^2 = \Delta_1^{-2}\lambda \,.\, d\lambda^2 + \Delta_1^{-2}\mu \,.\, d\mu^2 + \Delta_1^{-2}\nu \,.\, d\nu^2 \\ \quad = \dfrac{1}{4}\dfrac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{f(\lambda)} d\lambda^2 + \dfrac{1}{4}\dfrac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{f(\mu)} d\mu^2 + \dfrac{1}{4}\dfrac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{f(\nu)} d\nu^2, \end{array} \right.$$

en faisant pour abréger quel que soit $\rho$ :

$$(96) \qquad f(\rho) = (a^2+\rho)(b^2+\rho)(c^2+\rho).$$

Cela posé, faisant pour appliquer littéralement nos formules

Digitized by Google

$\lambda = \varphi$, $\mu = \psi$, $\nu = \varpi$, dans ces équations, et récrivant à cet effet les six premières ainsi qu'il suit

$$(97)\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2+\varphi}+\dfrac{y^2}{b^2+\varphi}+\dfrac{z^2}{c^2+\varphi}=1, & x^2=\dfrac{(a^2+\varphi)(a^2+\psi)(a^2+\varpi)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ \dfrac{x^2}{a^2+\psi}+\dfrac{y^2}{b^2+\psi}+\dfrac{z^2}{c^2+\psi}=1, & y^2=\dfrac{(b^2+\varphi)(b^2+\psi)(b^2+\varpi)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ \dfrac{x^2}{a^2+\varpi}+\dfrac{y^2}{b^2+\varpi}+\dfrac{z^2}{c^2+\varpi}=1, & z^2=\dfrac{(c^2+\varphi)(c^2+\psi)(c^2+\varpi)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}, \end{cases}$$

ce système comprendra la surface donnée parmi celles de la troisième famille pour une certaine valeur du paramètre $\varpi$, que nous supposerons dès lors constant dans tout ce qui va suivre, et nous aurons en outre, pour la surface donnée, par les formules (95), pour H et K les valeurs :

$$(98)\quad \begin{cases} H=\Delta_i^{-2}\lambda=\dfrac{1}{4}\dfrac{(\varphi-\psi)(\varphi-\varpi)}{f(\varphi)}, \quad K=\Delta_i^{-2}\mu=\dfrac{1}{4}\dfrac{(\psi-\varpi)(\psi-\varphi)}{f(\psi)}, \\ J=\Delta_i^{-2}\nu=\dfrac{1}{4}\dfrac{(\varpi-\varphi)(\varpi-\psi)}{f(\varpi)}. \end{cases}$$

D'autre part, si nous convenons de désigner par $2k$ l'attraction exercée sur l'unité de masse à l'unité de distance, nous aurons pour expression du travail élémentaire

$$X dx + Y dy + Z dz = 2k(x dx + y dy + z dz) = d.kr^2,$$

(la constante $k$ étant positive ou négative, suivant qu'il s'agira d'une répulsion ou d'une attraction) et par conséquent pour celle du travail total ou de la fonction des forces

$$(99)\qquad F(x, y, z) = \int (X dx + Y dy + Z dz) = kr^2,$$

expression qui transformée en coordonnées elliptiques nous donnera par définition la fonction $\mathcal{F}$.

Pour faire cette transformation, nous observerons que les trois

Digitized by Google

équations de gauche (97) expriment que $\varphi$, $\psi$, $\varpi$ sont les trois racines de l'équation du 3$^{me}$ degré en $\rho$

$$(99^{bis}) \qquad \frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{c^2}{c^2+\rho}=1,$$

ou ce qui est la même chose, en chassant les dénominateurs,

$$x^2(b^2+\rho)(c^2+\rho)+y^2(c^2+\rho)(a^2+\rho)+z^2(a^2+\rho)(b^2+\rho) = (a^2+\rho)(b^2+\rho)(c^2+\rho),$$

ou encore, en développant, faisant passer tous les termes dans le second membre, puis ordonnant par rapport à $\rho$ :

$$\rho^3+\left[a^2+b^2+c^2-(x^2+y^2+z^2)\right]\rho^2+\cdots+a^2b^2c^2=0.$$

On aura donc, en particulier, entre les coefficients et les racines la relation

$$\varphi+\psi+\varpi=-\left[a^2+b^2+c^2-(x^2+y^2+z^2)\right]=r^2-(a^2+b^2+c^2),$$

d'où l'on tirera immédiatement

$$r^2=\varphi+\psi+\varpi+a^2+b^2+c^2=\varphi+\psi+\mathrm{D},$$

en convenant de poser, pour abréger l'écriture,

$$(99^{ter}) \qquad \mathrm{D}=\varpi+a^2+b^2+c^2,$$

et par conséquent, en substituant dans l'expression (99) de F, nous aurons pour celle de la fonction $\mathcal{F}$

$$(100) \qquad \mathcal{F}(\varphi,\psi,\varpi)=k(\varphi+\psi)+k\mathrm{D}.$$

Or cette dernière expression étant écrite ainsi, en lui ajoutant la constante C,

$$(101)\quad \begin{cases} \mathcal{F}(\varphi,\psi,\varpi)+\mathrm{C}=\dfrac{1}{\varphi-\psi}\left[k(\varphi^2-\psi^2)+(k\mathrm{D}+\mathrm{C})(\varphi-\psi)\right] \\ \qquad\qquad =\dfrac{1}{\varphi-\psi}\left[k\varphi^2+(k\mathrm{D}+\mathrm{C})\varphi-\left\{k\psi^2+(k\mathrm{D}+\mathrm{C})\psi\right\}\right], \end{cases}$$

Digitized by Google

et étant rapprochée des expressions (98) de H et de K, montre que les conditions (76) du cas III, 1°, spéciales aux surfaces isothermes, sont satisfaites dans le cas actuel, en faisant simplement :

$$(102)\quad \begin{cases} \Phi(\varphi) = \varphi, & \Psi(\psi) = \psi, \\ \Phi_1(\varphi) = k\varphi^2 + (kD + C)\varphi, & \Psi_1(\psi) = k\psi^2 + (kD + C)\psi, \\ \Phi_2(\varphi) = \frac{1}{4}\frac{\varphi - \varpi}{f(\varphi)}, & \Psi_2(\psi) = \frac{1}{4}\frac{\psi - \varpi}{f(\psi)}. \end{cases}$$

La solution complète du problème est dès lors fournie par les deux équations (77), qui sont, avec les valeurs qui précèdent (en multipliant par 2, et écrivant C′ à la place de 2C′ au second membre de la première)

$$(103)\quad \begin{cases} \int \sqrt{\frac{\varphi - \varpi}{f(\varphi)\left[k\varphi^2 + (kD + C)\varphi + C_1\right]}}\, d\varphi \\ \pm \int \sqrt{\frac{\psi - \varpi}{f(\psi)\left[k\psi^2 + (kD + C)\psi + C_1\right]}}\, d\psi = C', \quad (*) \\ \int \sqrt{\frac{\varphi - \varpi}{f(\varphi)\left[k\varphi^2 + (kD + C)\varphi + C_1\right]}}\, \varphi d\varphi \\ \pm \int \sqrt{\frac{\psi - \varpi}{f(\psi)\left[k\psi^2 + (kD + C)\psi + C_1\right]}}\, \psi d\psi = \pm 2\sqrt{2}\,(t + C''), \end{cases}$$

(*) Longtemps après que ce mémoire était composé et rédigé, nous avons eu connaissance que la première de ces deux équations (celle de la trajectoire) avait déjà été rencontrée à l'aide d'un procédé absolument spécial à l'ellipsoïde, et incapable de généralisation, par M. SCHELLBACH, et signalée par lui sous le numéro (28), dans une courte note, insérée à la fin du 54e volume du *Journal de Crelle* (1857) (page 380). Mais pour déterminer les coordonnées du point mobile en fonction du temps, au lieu de notre seconde équation, qui est exprimée à l'aide de deux intégrales analogues à celles qui figurent dans la première,

Digitized by Google

dans lesquelles les valeurs des constantes C et $C_1$ sont celles fournies par les formules (78) et (79), c'est-à-dire pour la première d'abord, eu égard à l'expression (100) de la fonction $\mathcal{F}$,

$$C = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) - k(\varphi_0 + \psi_0) - kD. \tag{104}$$

Or cette première valeur donnant

$$kD + C = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) - k(\varphi_0 + \psi_0), \tag{104bis}$$

on en déduira séparément, en ayant égard aux expressions (102) de $\Phi_1$, et $\Psi_1$,

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_1(\varphi_0) &= k\varphi_0^2 + (kD + C)\varphi_0 \\ &= k\varphi_0^2 + \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2)\varphi_0 - k(\varphi_0 + \psi_0)\varphi_0 = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2)\varphi_0 - k\varphi_0\psi_0, \\ \Psi_1(\psi_0) &= k\psi_0^2 + (kD + C)\psi_0 \\ &= k\psi_0^2 + \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2)\psi_0 - k(\varphi_0 + \psi_0)\psi_0 = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2)\psi_0 - k\varphi_0\psi_0, \end{aligned}\right. \tag{105}$$

et par conséquent, en reportant ces deux expressions dans la valeur (79) de $C_1$, on aura de même pour celle-ci

$$C_1 = -\frac{1}{u_0^2 + v_0^2}\left[\left\{\frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2)\psi_0 - k\varphi_0\psi_0\right\}u_0^2 + \left\{\frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2)\varphi_0 - k\varphi_0\psi_0\right\}v_0^2\right],$$

---

et calculables chacune sans aucune opération préalable, son équation (26) qu'il indique par cet objet (page 385) n'est autre chose que notre équation ci-dessus (74), dans laquelle les fonctions $\Phi_1$, $\Psi_1$, $\Phi_2$, $\Psi_2$, et la fonction des forces $\mathcal{F}$ seraient remplacées par leurs valeurs relatives à la question actuelle, c'est-à-dire par les expressions (102) et (100), et sous cette forme on voit alors qu'elle n'est intégrable par quadrature qu'à la condition d'y supposer l'une des deux inconnues $\varphi$ ou $\psi$ remplacée par sa valeur en fonction de l'autre, tirée de l'équation de la trajectoire supposée calculée et résolue explicitement par rapport à l'une des variables. Or cette dernière opération n'étant pas réalisable *effectivement* dans le cas actuel, vu la nature des fonctions hyperelliptiques qui entrent dans cette équation, on ne peut pas dire que pour cette seconde partie du problème la solution ainsi présentée soit réellement, de même que pour la première, ramenée, comme nous le faisons, à de simples quadratures.

Digitized by Google

c'est-à-dire simplement :

$$C_1 = k\varphi_0\psi_0 - \frac{1}{2}(\psi_0 u_0^2 + \varphi_0 v_0^2). \quad (106)$$ (*)

Si maintenant on fait attention qu'avec les expressions (102) des fonctions $\Phi_1(\varphi)$ et $\Psi_1(\psi)$, et les deux valeurs (104bis) et (106) de $(kD + C)$ et de $C_1$, les deux quantités $\Phi_1 + C_1$ et $\Psi_1 + C_1$ peuvent s'écrire ainsi

$$(106^{bis}) \quad \begin{cases} \Phi_1(\varphi) + C_1 = \dfrac{1}{4k}\Big[\{2k(\varphi - \varphi_0) + u_0^2\}\{2k(\varphi - \psi_0) + v_0^2\} - u_0^2 v_0^2\Big], \\ \Psi_1(\psi) + C_1 = \dfrac{1}{4k}\Big[\{2k(\psi - \varphi_0) + u_0^2\}\{2k(\psi - \psi_0) + v_0^2\} - u_0^2 v_0^2\Big], \end{cases}$$

puis, qu'ayant remis dans les équations (80) à la place de $\varphi$, $\psi$, $\varpi$, les coordonnées $\lambda$, $\mu$, $\nu$, qu'elles étaient censées représenter, on convienne ensuite, pour plus de simplicité, de faire la constante arbitraire $\nu$ égale à zéro, c'est-à-dire en fait de prendre pour les constantes $a$, $b$, $c$ précisément les demi-axes de l'ellipsoïde donné, on obtiendra, en divisant par $\sqrt{k}$ ces deux équations (80), tenant compte des valeurs (106bis) qui précèdent, et supposant que chaque radical emporte avec lui son signe, pour solution complète et définitive du problème, les deux équations

$$(106^{ter}) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda f(\lambda)\,\Lambda}} + \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu f(\mu)\,M}} = 0, \\ \displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda f(\lambda)\,\Lambda}} + \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{\mu f(\mu)\,M}} = \pm\sqrt{\frac{2}{k}}\,t, \end{cases}$$

(*) On s'assure immédiatement que, pour le cas particulier où l'on suppose nulle la vitesse initiale, la valeur de $C_1$ fournie par cette formule est bien celle que donnerait la formule (A) que nous avons établie pour cette hypothèse, dans le même cas 1° (page 59 en note, *in fine*); car les valeurs (105) ci-dessus de $\Phi_1(\varphi_0)$ et $\Psi_1(\psi_0)$ se réduisent dans ce cas particulier à $\Phi_1(\varphi_0) = \Psi_1(\psi_0) = -k\varphi_0\psi_0$, on voit que la valeur de $C_1$ fournie par cette formule (A) peut s'écrire alors :

$$C_1 = -\frac{(-k\varphi_0\psi_0)\left[\Psi_2(\psi_0)\left(\dfrac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2 - \Phi_2(\varphi_0)\left(\dfrac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2\right]}{\Psi_2(\psi_0)\left(\dfrac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2 - \Phi_2(\varphi_0)\left(\dfrac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2} = k\varphi_0\psi_0.$$

Digitized by Google

dans lesquelles les symboles Λ et M représentent, pour abréger l'écriture, les deux polynômes du 4e degré

$$\begin{cases} \Lambda = [2k(\lambda - \lambda_0) + u_0^2][2k(\lambda - \mu_0) + v_0^2] - u_0^2 v_0^2 \\ M = [2k(\mu - \lambda_0) + u_0^2][2k(\mu - \mu_0) + v_0^2] - u_0^2 v_0^2 \end{cases}$$

la fonction $f(\rho)$ désignent toujours celui du 3e degré

$$f(\rho) = (a^2 + \rho)(b^2 + \rho)(c^2 + \rho),$$

et qui dépendent en conséquence des fonctions hyperelliptiques.

Dans l'hypothèse de la force attractive, la constante $k$ affectant alors une valeur négative, il sera nécessaire, pour avoir des expressions réelles, de multiplier par $\sqrt{-1}$ les deux membres de chacune des équations (106ter), ce qui revient à introduire le facteur $-1$ sous chacun des radicaux qui y figurent, et qui sont par hypothèse les mêmes dans les deux équations.

Dans les mêmes circonstances nos formules (80bis) et (80ter) nous donneront, pour définir en grandeur et en direction le rayon de courbure, en un point quelconque de la trajectoire représentée par la première de ces deux équations, les expressions suivantes des trois composantes U, V, W de la courbure

$$\begin{cases} \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{M}{(\lambda-\mu)^5}}} = \dfrac{V}{\sqrt{\dfrac{\Lambda}{(\mu-\lambda)^5}}} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{f(\mu)}{\mu}\Lambda} + \sqrt{\dfrac{f(\lambda)}{\lambda}M}}{[2k(\lambda - \lambda_0 + \mu - \mu_0) + u_0^2 + v_0^2]^2} \\ W = \dfrac{abc}{2k} \dfrac{\mu\Lambda - \lambda M}{(\lambda-\mu)[2k(\lambda - \lambda_0 + \mu - \mu_0) + u_0^2 + v_0^2](\lambda\mu)^{\frac{3}{2}}}, \end{cases}$$

pour le calcul desquelles nous prions encore le lecteur de se reporter à la note III de l'appendice, à la suite de ce Mémoire.

Le signe qu'il faudra prendre devant la seconde intégrale de chacune des équations (103) ou (106ter) sera évidemment, d'après l'intégrale première (69), le signe contraire du rapport $\frac{d\varphi}{d\psi}$, lequel

Digitized by Google

est déterminé pour l'instant initial, eu égard aux valeurs (4), par celui de la quantité donnée

$$\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)_0 = \left(\frac{\Delta_1\varphi \,.\, udt}{\Delta_1\psi \,.\, vdt}\right)_0 = \frac{(\Delta_1\varphi)_0}{(\Delta_1\psi)_0}\frac{u_0}{v_0},$$

et se décidera ensuite d'une façon analogue, chaque fois qu'il y aura lieu, à l'aide d'une discussion pareille à celle que l'on fait pour chaque problème avec les coordonnées classiques.

La solution contenue dans les formules (103), où C et $C_1$ sont censées représenter les valeurs (104) et (106), comprend comme cas particulier en y faisant $k = 0$, c'est-à-dire en supposant nulle la force d'attraction, celle que l'illustre Jacobi donne sous les numéros (3) et (4) dans la 28e de ses *Vorlesungen über Dynamick* (page 214), pour le problème du mouvement d'un point matériel astreint à rester sur un ellipsoïde sans être soumis à l'action d'aucune force extérieure, solution qu'il présente comme application de sa belle méthode d'intégration des équations de la Dynamique, basée sur les travaux de Hamilton, laquelle paraissait ainsi indispensable pour traiter ce genre de problèmes (*). Il n'était donc pas sans intérêt, croyons-nous, de montrer que l'em-

(*) Pour faire coïncider nos résultats avec ceux de Jacobi, il faut substituer à notre seconde équation (103) celle que l'on obtient en ajoutant à cette seconde équation la première multipliée par $\frac{C_1}{C}$, équation qu'on peut écrire, en faisant passer le facteur $\varphi + \frac{C_1}{C}$ sous le radical, et écrivant dans le second membre $C''_1$ à la place de la constante $C'' \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{C_1 C'}{C}$ :

$$\int \sqrt{\frac{(\varphi - \varpi)\left(\varphi + \frac{C_1}{C}\right)^2}{f(\varphi)\left[k\varphi^2 + (kD + C)\varphi + C_1\right]}}\, d\varphi$$

$$\pm \int \sqrt{\frac{(\psi - \varpi)\left(\psi + \frac{C_1}{C}\right)^2}{f(\psi)\left[k\psi^2 + (kD + C)\psi + C_1\right]}}\, d\psi = \pm 2\sqrt{2}(t + C''_1);$$

Digitized by Google

ploi seul des coordonnées curvilignes, introduit en analyse par Lamé, suffisait, à l'aide de procédés usuels et purement classiques, pour traiter les mêmes questions, ou même d'autres d'une complication plus grande encore, sans être obligé d'avoir recours aux profondes méthodes du Maître de Königsberg, qui par leur étendue, leur fécondité, et le jour nouveau dont elles ont éclairé toute la théorie des équations aux dérivées partielles, constituent, à proprement parler, un chapitre à part de l'analyse moderne.

EXEMPLES RELATIFS AU CÔNE DU SECOND ORDRE, ET A LA SPHÈRE. 1° *Cône.* — Comme seconde application de nos méthodes d'intégration, proposons-nous de déterminer le mouvement d'un point matériel astreint à rester sur un cône du second ordre (non de révolution), et soumis à deux forces d'attraction, l'une émanant du sommet et variant en raison inverse du carré de la distance, et l'autre émanant de l'axe réel (ou intérieur) de ce cône, et variant en raison inverse du cube de la distance à cet axe.

Pour traiter cette question par notre méthode, la première chose à faire est d'adopter un système de coordonnées auquel on puisse rattacher la surface donnée, c'est-à-dire qui comprenne parmi ses trois surfaces une famille de cônes du second ordre.

A cet effet, bien que le système des coordonnées elliptiques, défini par les équations (94), que nous avons employé pour traiter l'exemple précédent, ne comprenne jamais comme surfaces coordonnées que des ellipsoïdes et des hyperboloïdes, quelles que soient les valeurs des constantes $a^2$, $b^2$, $c^2$, qui entrent dans sa définition, on peut néanmoins s'en servir pour traiter les

---

et dès lors en faisant dans cette dernière équation, et dans notre première (103) :

$$\left\{\begin{array}{c} \varphi = \lambda_2, \qquad \psi = \lambda_3, \qquad \varpi = \lambda_1, \\ f(\lambda) = (a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda)(a_3 + \lambda), \\ k = 0, \quad C = h, \quad C_1 = C\mathcal{C}, \quad \sqrt{C\mathcal{C}'} = \text{const}, \quad C_1'' = -\tau, \end{array}\right.$$

on retrouve *littéralement* les équations (3) et (4) sus-indiquées de Jacobi. (Au sujet de la concordance des résultats de notre méthode avec ceux fournis par la méthode de Jacobi, voir la note II, en appendice, à la fin du Mémoire.)



Digitized by Google

questions relatives au cône du second ordre, en le modifiant légèrement de la façon que nous allons expliquer (*).

Pour cela nous remplacerons dans ces deux systèmes d'équations (94) $a$, $b$, $c$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$, respectivement par $ka$, $kb$, $kc$, $k^2\lambda$, $k^2\mu$, et $r^2$ (changement qui laisse subsister sans modification, quel que soit $k$, les quatre premières inégalités de définition (93)), ce qui transformera d'abord ces deux systèmes dans les suivants

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{a^2+\lambda}+\dfrac{y^2}{b^2+\lambda}+\dfrac{z^2}{c^2+\lambda}=k^2, & x^2=\dfrac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}(k^2a^2+r^2), \\ \dfrac{x^2}{a^2+\mu}+\dfrac{y^2}{b^2+\mu}+\dfrac{z^2}{c^2+\mu}=k^2, & y^2=\dfrac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}(k^2b^2+r^2), \\ \dfrac{x^2}{k^2a^2+r^2}+\dfrac{y^2}{k^2b^2+r^2}+\dfrac{z^2}{k^2c^2+r^2}=1, & z^2=\dfrac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}(k^2c^2+r^2), \end{array}\right.$$

et les trois surfaces coordonnées, représentées en coordonnées rectilignes par le premier de ces systèmes, ne cessant évidemment pas d'être orthogonales entre elles après ce changement de notation, quelle que soit la valeur attribuée au coefficient $k$, nous y ferons $k=0$, ce qui nous donnera définitivement les deux nouveaux systèmes équivalents entre eux

$$(107)\quad\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{a^2+\lambda}+\dfrac{y^2}{b^2+\lambda}+\dfrac{z^2}{c^2+\lambda}=0. & x^2=\dfrac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}r^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2+\mu}+\dfrac{y^2}{b^2+\mu}+\dfrac{z^2}{c^2+\mu}=0. & y^2=\dfrac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}r^2 \\ x^2+y^2+z^2=r^2 & z^2=\dfrac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}r^2 \end{array}\right.$$

(*) Le système des coordonnées coniques, dont nous donnons ci-après les formules, a déjà été employé par plusieurs auteurs, notamment par M. C. NEUMANN, dans un très curieux et intéressant mémoire, dont nous retrouvons les résultats par notre méthode quelques pages plus bas, intitulé *De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultra-ellipticarum classem revocatur*, et inséré au tome LVI du *Journal de Crelle* (1858, pages 46-63; voir formules (3), page 48). Mais comme ce système de coordonnées, ainsi que celui formé de trois familles de paraboloïdes, dont nous faisons usage un peu plus loin, sont en somme fort peu connus (nous avouons, pour notre part, ne les avoir encore jamais rencontrés, lorsque nous avons composé ce mémoire), nous croyons accomplir une œuvre qui ne sera peut-être pas sans utilité pour le lecteur, en indiquant dans ce travail même, avant d'en faire emploi, comment on peut les obtenir l'un et l'autre, comme limites du système des coordonnées elliptiques.

Digitized by Google

qui définissent un système coordonné, composé d'une famille de sphères concentriques au paramètre $r$, et de deux familles de cônes du second ordre aux paramètres $\lambda$ et $\mu$, ayant leur sommet commun au centre de la sphère, et dont il est facile de vérifier immédiatement l'orthogonalité, car les trois équations du second système donnent par une combinaison facile

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)}$$
$$=\frac{[(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)]}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)}r^2=0,$$

ce qui est précisément, comme on le reconnaît de suite, la condition de perpendicularité des deux surfaces en chacun de leurs points communs.

Enfin l'expression (95) de l'élément d'arc en coordonnées elliptiques, devenant par les mêmes substitutions

$$ds^2=\frac{1}{4}\frac{k^2(\lambda-\mu)(k^2\lambda-r^2)}{k^6 f(\lambda)}(k^2 d\lambda)^2+\frac{1}{4}\frac{(k^2\mu-r^2)k^2(\mu-\lambda)}{k^6 f(\mu)}(k^2 d\mu)^2$$
$$+\frac{1}{4}\frac{(r^2-k^2\lambda)(r^2-k^2\mu)}{(k^2a^2+r^2)(k^2b^2+r^2)(k^2c^2+r^2)}(d.r^2)^2,$$

c'est-à-dire en simplifiant

$$ds^2=\frac{1}{4}\frac{(\lambda-\mu)}{f(\lambda)}(k^2\lambda-r^2).d\lambda^2+\frac{1}{4}\frac{\mu-\lambda}{f(\mu)}(k^2\mu-r^2).d\mu^2$$
$$+\frac{r^2(r^2-k^2\lambda)(r^2-k^2\mu)}{(k^2a^2+r^2)(k^2b^2+r^2)(k^2c^2+r^2)}.dr^2,$$

et se réduisant par suite lorsqu'on y fera $k=0$, à

$$ds^2=\frac{1}{4}\frac{\mu-\lambda}{f(\lambda)}r^2.d\lambda^2+\frac{1}{4}\frac{\lambda-\mu}{f(\mu)}r^2.d\mu^2+dr^2$$
$$=\Delta_1^{-2}\lambda.d\lambda^2+\Delta_1^{-2}\mu.d\mu^2+\Delta_1^{-2}r.dr^2,$$

Digitized by Google

montre que l'on a dans le système des coordonnées coniques, $\lambda, \mu, r$

$$(108) \qquad \Delta_1^{-2}\lambda = \frac{1}{4}\frac{\mu-\lambda}{f(\lambda)}r^2, \qquad \Delta_1^{-2}\mu = \frac{1}{4}\frac{\lambda-\mu}{f(\mu)}r^2, \qquad \Delta_1^{-2}r = 1.$$

Cela posé, pour faire emploi de ces formules dans la question proposée, nous prendrons pour axe des $z$ l'axe réel (ou intérieur) du cône donné, et pour axe des $x$ le plus grand des deux autres axes, de telle sorte que l'équation de ce cône sera alors nécessairement de la forme

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 0,$$

A, B, C étant réels, et remplissant la condition $A > B$. On voit dès lors sans peine que cette surface pourra être considérée comme l'une de celles de la famille des cônes au paramètre $\mu$, car les constantes $a^2, b^2, c^2$, et $\mu$, étant assujetties par définition simplement aux conditions

$$-a^2 < -b^2 < \mu < -c^2,$$

ou ce qui est la même chose

$$a^2 > b^2, \qquad a^2 + \mu > 0, \qquad b^2 + \mu > 0, \qquad c^2 + \mu < 0,$$

on reconnaît de suite qu'on y satisfera en prenant :

$$a^2 = A^2, \qquad b^2 = B^2, \qquad c^2 = -C^2, \qquad \mu = 0.$$

Convenant donc d'attribuer, dans tout le calcul qui va suivre, aux constantes $a^2, b^2, c^2$, et $\mu$ ces valeurs, il suffira pour pouvoir appliquer littéralement nos formules d'intégration de faire de même

$$(108^{bis}) \qquad r = \varphi, \qquad \lambda = \psi, \qquad \mu = \varpi = 0,$$

et avec ces nouvelles notations, les formules (108) nous donne-

Digitized by Google

ront, en ne supposant pas tout d'abord la coordonnée $\varpi$ égale à zéro, pour les quantités H, K, J, les valeurs

$$(108^{ter}) \quad \begin{cases} H = \Delta_1^{-2} r = 1, & K = \Delta_1^{-2}\lambda = \frac{1}{4}\frac{\varpi - \psi}{f(\psi)}\varphi^2, \\ & J = \Delta_1^{-2}\mu = \frac{1}{4}\frac{\psi - \varpi}{f(\varpi)}\varphi^2, \end{cases}$$

et en particulier pour la surface donnée, pour laquelle on a $\varpi = 0$,

$$(109) \qquad H = 1, \qquad K = -\frac{\psi}{4f(\psi)}\varphi^2, \qquad J = \frac{\psi}{4f(0)}\varphi^2.$$

D'autre part, si nous convenons de désigner par $k$ et $k_1$ les constantes d'attraction correspondant aux deux forces données, supposées inversement proportionnelles, la première au carré de la distance $r$ au sommet, et la seconde au cube de la distance $\rho$ à l'axe intérieur du cône, que nous avons pris pour axe des $z$, la fonction des forces F sera par définition :

$$F = -\int \frac{k dr}{r^2} - \int \frac{k_1 d\rho}{\rho^3} = \frac{k}{r} + \frac{1}{2}\frac{k_1}{\rho^2}.$$

Or, la troisième des formules de droite (107) donnant avec l'hypothèse $\mu = \varpi = 0$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = r^2 - z^2 = r^2\left[1 - \frac{(c^2+\lambda)c^2}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\right]$$

$$= r^2\frac{(c^2-a^2)(c^2-b^2) - c^2(c^2+\lambda)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} = \frac{a^2b^2 - c^2(a^2+b^2+\lambda)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}r^2,$$

on aura, en substituant cette valeur de $\rho^2$ dans celle de F qui précède, pour l'expression de la fonction $\mathcal{F}$ la suivante

$$(109^{bis}) \qquad \mathcal{F}(r, \lambda, \mu) = \frac{k}{r} + \frac{1}{2}\frac{(a^2-c^2)(b^2-c^2)k_1}{a^2b^2 - c^2(a^2+b^2+\lambda)}\frac{1}{r^2},$$

ou bien, en effectuant pareillement le changement de notation

Digitized by Google

(108bis), et faisant pour simplifier l'écriture $k' = \frac{1}{2}(a^2-b^2)(a^2-c^2)k_1$, pour celle de la fonction $\mathcal{F} + C$, celle-ci :

$$(110) \quad \mathcal{F}(\varphi, \psi\, \varpi) + C = \frac{k}{\varphi} + \frac{k'}{a^2b^2 - c^2(a^2+b^2+\psi)}\frac{1}{\varphi^2} + C.$$

Ces préliminaires étant admis, la question que nous nous sommes proposée peut être résolue par la méthode d'intégration du cas III, soit à l'aide de formules du sous-cas 1°, soit par le moyen de celles du sous-cas 2°, ainsi qu'il est nécessaire, la surface étant encore isotherme d'une part, et d'autre part du moment que nous avons reconnu que les premières sont plus générales, et comprennent en réalité les secondes comme cas particulier. En effet les expressions (109) et (110), que nous avons trouvées pour la question actuelle, coïncideront avec les expressions (76) du cas 1°, en faisant

$$\left\{\begin{array}{lll} \Phi(\varphi) = \varphi^2, & \Phi_1(\varphi) = k\varphi + C\varphi^2, & \Phi_2(\varphi) = \dfrac{1}{\varphi^2} \\ \Psi(\psi) = 0, & \Phi_1(\psi) = \dfrac{-k'}{a^2b^2 - c^2(a^2+b^2+\psi)}, & \Psi_2(\psi) = \dfrac{1}{4}\dfrac{\psi}{f(\psi)}, \end{array}\right.$$

et elles coïncideront également avec les expressions (90) du sous-cas 2°, en faisant pareillement :

$$\Omega = \text{const.} = 1,$$

$$(110^{bis}) \quad \left\{\begin{array}{lll} \Phi(\varphi) = k\varphi + C\varphi^2, & \Phi_1(\varphi) = 1, & \Phi_2(\varphi) = \varphi^2, \\ \Psi(\psi) = \dfrac{-k'}{a^2b^2 - c^2(a^2+b^2+\psi)}, & \Psi_1(\psi) = 1, & \Psi_2(\psi) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{\psi}{f(\psi)}. \end{array}\right.$$

Ayant ainsi le choix des deux procédés de calcul, comme nous avons déjà présenté par l'exemple précédent une application du calcul relatif au cas 1°, nous traiterons en conséquence le problème actuel par les formules du cas 2°, afin d'en montrer également une application.

Nous plaçant donc au point de vue des hypothèses (90), c'est-

Digitized by Google

à-dire admettant pour les sept fonctions $\Phi$, $\Psi$, $\Phi_1$, $\Psi_1$, $\Phi_2$, $\Psi_2$, et $\Omega$, ces dernières valeurs (110$^{bis}$), la solution du problème sera dès lors fournie intégralement par les équations (91), dont la seconde, qui est susceptible d'une double forme, sera, en choisissant le premier type, immédiatement intégrable par quadrature sans substitution préalable, attendu que l'on a par les valeurs (110$^{bis}$) $(\Omega\Psi_1)_\varphi = \Omega\Psi_1 = 1$.

Ayant donc, avec ces valeurs (110$^{bis}$),

$$\left\{\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi)+C_1}} = \frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{C_1+k\varphi+C\varphi^2}},\\
&(\Omega\Psi_1)_\varphi\sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi)\Phi_2(\varphi)}{\Phi(\varphi)+C_1}}d\varphi = \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{C_1+k\varphi+C\varphi^2}},\\
&\sqrt{\frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}}\frac{d\psi}{\sqrt{\Psi(\psi)+C_1}} = \sqrt{\frac{1}{4}\frac{\psi}{f(\psi)}}\frac{d\psi}{\sqrt{C_1-\dfrac{k'}{a^2b^2\quad c^2(a^2+b^2+\psi)}}}\\
&\qquad = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\psi\{a^2b^2-c^2(a^2+b^2+\psi)\}}{f(\psi)\left|\{a^2b^2-c^2(a^2+b^2+\psi)\}C_1-k'\right|}}d\psi\\
&\qquad = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\psi(D-c^2\psi)}{f(\psi)(G-c^2C_1\psi)}}d\psi,
\end{aligned}\right.$$

en désignant pour abréger par D et G les constantes

$$(111)\qquad D = a^2b^2 - c^2(a^2+b^2), \qquad G = \{a^2b^2 - c^2(a^2+b^2)\}C_1 - k',$$

la solution du problème consistera d'après les formules (91) dans les deux équations

$$111^{bis})\quad \left\{\begin{aligned}
&\int\frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{C_1+k\varphi+C\varphi^2}} \pm \frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{\psi(D-c^2\psi)}{f(\psi)(G-c^2C_1\psi)}}d\psi = C',\\
&\int\frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{C_1+k\varphi+C\varphi^2}} = \pm\sqrt{2}(t+C''),
\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles les deux intégrales en $\varphi$ sont de celles que l'on

Digitized by Google

peut obtenir aisément à l'aide des procédés classiques, l'intégrale en $\psi$ dépendant seule des fonctions hyperelliptiques.

La forme des deux expressions que donnent ces deux quadratures en $\varphi$ dépendra du signe des constantes C et $C_1$, dont les valeurs fournies par les formules (92) sont dans le cas actuel : savoir pour C, eu égard à l'expression (110) de la fonction $\mathcal{F}$,

$$(112) \qquad C = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) - \left[\frac{k}{\varphi_0} + \frac{k'}{a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2 + \psi_0)}\frac{1}{\varphi_0^2}\right],$$

et pour $C_1$, en ayant égard aux expressions ($110^{bis}$) des fonctions $\Phi, \Psi$ :

$$C_1 = -\frac{1}{u_0^2 + v_0^2}\left[(k\varphi_0 + C\varphi_0^2)v_0^2 - \frac{k'u_0^2}{a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2 + \psi_0)}\right].$$

Mais cette dernière expression doit être amenée à sa forme définitive, en y remettant à la place de C sa valeur qui précède. A cet effet, ayant par cette valeur (112), en multipliant par $v_0^2\varphi_0^2$,

$$(k\varphi_0 + C\varphi_0^2)v_0^2 = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2)v_0^2\varphi_0^2 - \frac{k'v_0^2}{a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2 + \psi_0)},$$

la valeur de $C_1$ deviendra, en y reportant cette dernière expression,

$$C_1 = -\frac{1}{u_0^2 + v_0^2}\left[\frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2)v_0^2\varphi_0^2 - \frac{k'(u_0^2 + v_0^2)}{a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2 + \psi_0)}\right],$$

c'est-à-dire simplement :

$$(112^{bis}) \qquad C_1 = \frac{k'}{a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2 + \psi_0)} - \frac{1}{2}v_0^2\varphi_0^2 \ (*).$$

---

(*) On voit de suite encore que la valeur particulière

$$C_1 = \frac{k'}{a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2 + \psi_0)} = -\Psi(\psi_0),$$

à laquelle se réduit cette expression de $C_1$, dans l'hypothèse de la vitesse initiale nulle, est bien la même que fournit la formule (B) que nous avons donnée pour cette hypothèse

Digitized by Google

Les expressions de ces quadratures seront, en effet, savoir :

(115)

1° *a*) pour la première, dans l'hypothèse de $C_1 > 0$,

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{C_1+k\varphi+C\varphi^2}} = -\frac{1}{\sqrt{C_1}}\,l\left[\frac{1}{\varphi}\left(\sqrt{C_1}+\frac{k\varphi}{2\sqrt{C_1}}+\sqrt{C_1+k\varphi+C\varphi^2}\right)\right],$$

*b*) et dans le cas contraire de $C_1 < 0$

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{C_1+k\varphi C+\varphi^2}} = \frac{1}{\sqrt{-C_1}}\arccos\frac{k\varphi+2C_1}{\varphi\sqrt{k^2-4CC_1}};$$

2° *c*) pour la seconde, dans l'hypothèse de $C > 0$

$$\int \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{C_1+k\varphi+C\varphi^2}} = \frac{1}{C}\sqrt{C_1+k\varphi+C\varphi^2} - \frac{k}{2C\sqrt{C}}\,l\left(\varphi\sqrt{C}+\frac{k}{2\sqrt{C}}+\sqrt{C_1+k\varphi+C\varphi^2}\right),$$

*d*) et dans l'hypothèse contraire de $C < 0$,

$$\int \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{C_1+k\varphi+C\varphi^2}} = \frac{1}{C}\sqrt{C_1+k\varphi+C\varphi^2} + \frac{k}{2C\sqrt{-C}}\arccos\frac{2C\varphi+k}{\sqrt{k^2-4CC_1}}$$

---

dans le même cas 2° (voir page 66 en note, *in fine*); car l'équation (112) étant multipliée par $\varphi_0^2$, et traitée comme plus haut, donnera en général pour résultat :

$$\Phi(\varphi_0) = \frac{1}{2}(u_0^2+v_0^2)\varphi_0^2 + \Psi(\psi_0),$$

et se réduira par conséquent dans le cas particulier en question à

$$\Phi(\varphi_0) = \Psi(\psi_0),$$

d'où il suit que la valeur de $C_1$ fournie par cette formule (B) sera alors :

$$C_1 = -\frac{\Psi(\psi_0)\left[\Phi_2(\varphi_0)\Psi_2(\psi_0)\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2+\Phi_1(\varphi_0)\Psi_1(\psi_0)\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2\right]}{\Phi_2(\varphi_0)\Psi_2(\psi_0)\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2+\Phi_1(\varphi_0)\Psi_1(\psi_0)\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2} = -\Psi(\psi_0).$$

Digitized by Google

Si l'on convient donc de représenter pour abréger par $F(\psi)$ l'intégrale hyperelliptique

$$(113^{bis})\quad \left\{\begin{array}{l} F(\psi)=\displaystyle\int_{\psi_0}^{\psi}\sqrt{\frac{\psi(D-c^2\psi)}{f(\psi)(G-C_1c^2\psi)}}\,d\psi \\ \qquad =\displaystyle\int_{\psi_0}^{\psi}\sqrt{\frac{\psi(D-c^2\psi)}{(a^2+\psi)(b^2+\psi)(c^2+\psi)(G-C_1c^2\psi)}}\,d\psi, \end{array}\right.$$

où D et G représentent les constantes (111), et qu'on remette à la place des variables $\varphi$ et $\psi$ les coordonnées coniques $r$ et $\lambda$ qu'elles représentent par définition dans les calculs qui précèdent, la première équation (91), ou équation de la trajectoire du point matériel, sera en conséquence, d'après le tableau (113) :

*a*) pour le cas de $C_1 > 0$

$$-\frac{1}{\sqrt{C_1}}\,l\left[\frac{1}{r}\left(\sqrt{C_1}+\frac{kr}{2\sqrt{C_1}}+\sqrt{C_1+kr+Cr^2}\right)\right]\pm\frac{1}{2}F(\lambda)=C',$$

d'où, par conséquent, en faisant $t=0$, pour C' la valeur

$$-\frac{1}{\sqrt{C_1}}\,l\left[\frac{1}{r_0}\left(\sqrt{C_1}+\frac{kr_0}{2\sqrt{C_1}}+\sqrt{C_1+kr_0+Cr_0^2}\right)\right]=C',$$

et, en retranchant la première équation de la seconde, puis multiplant par $\sqrt{C_1}$,

$$l\left[\frac{1}{r}\left(\sqrt{C_1}+\frac{kr}{2\sqrt{C_1}}+\sqrt{C_1+kr+Cr^2}\right)\right]$$
$$-l\left[\frac{1}{r_0}\left(\sqrt{C_1}+\frac{kr_0}{2\sqrt{C_1}}+\sqrt{C_1+kr_0+Cr_0^2}\right)\right]=\pm\frac{1}{2}\sqrt{C_1}F(\lambda),$$

et finalement, en repassant des logarithmes aux nombres, on aura entre $r$ et $\lambda$ l'équation

$$(113^{ter})\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{r}\left(\sqrt{C_1}+\dfrac{kr}{2\sqrt{C_1}}+\sqrt{C_1+kr+Cr^2}\right) \\ \qquad =\dfrac{1}{r_0}\left(\sqrt{C_1}+\dfrac{kr_0}{2\sqrt{C_1}}+\sqrt{C_1+kr_0+Cr_0^2}\right)e^{\pm\frac{1}{2}\sqrt{C_1}F(\lambda)}; \end{array}\right.$$

Digitized by Google

*b*) pour le cas de $C_1 < 0$

$$\frac{1}{\sqrt{-C}} \arccos \frac{kr + 2C_1}{r\sqrt{k^2 - 4CC_1}} \pm \frac{1}{2} F(\lambda) = C',$$

d'où par conséquent dans cet autre cas, en faisant $t = 0$, les valeurs

$$\begin{cases} C' = \dfrac{1}{\sqrt{-C_1}} \arccos \dfrac{kr_0 + 2C_1}{r_0\sqrt{k^2 - 4CC_1}}, \\ \cos C'\sqrt{-C_1} = \dfrac{kr_0 + 2C_1}{r_0\sqrt{k^2 - 4CC_1}}, \\ \sin C'\sqrt{-C_1} = \pm \dfrac{2\sqrt{-C_1}\sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2}}{r_0\sqrt{k^2 - 4CC_1}}; \end{cases}$$

or, en supposant cette valeur de C′ remise dans l'équation qui précède, et multipliant par $\sqrt{-C_1}$, cette équation deviendra

$$\arccos \frac{kr + 2C_1}{r\sqrt{k^2 - 4CC_1}} = \sqrt{-C_1}\left[C' \mp \frac{1}{2} F(\lambda)\right],$$

ou, en prenant les cosinus des deux membres,

$$\begin{aligned} \frac{2C_1}{r} &= -k + \sqrt{k^2 - 4CC_1}\cos\left[\sqrt{-C_1}\left(\frac{1}{2}F(\lambda) - C'\right)\right] \\ &= -k + \sqrt{k^2 - 4CC_1}\left[\cos\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{-C_1}F(\lambda)\right)\cos C'\sqrt{-C_1}\right. \\ &\qquad \left. + \sin\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{-C_1}F(\lambda)\right)\sin C'\sqrt{-C_1}\right] \\ &= -k + \frac{kr_0 + 2C_1}{r_0}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-C_1}F(\lambda)\right) \\ &\qquad \pm \frac{2\sqrt{-C_1}}{r_0}\sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-C_1}F(\lambda)\right), \end{aligned}$$

Digitized by Google

d'où finalement l'équation simple pour déterminer $r$ en fonction de $\lambda$

$$(114)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{r_0}{r} = -\dfrac{kr_0}{2C_1} + \left(1 + \dfrac{kr_0}{2C_1}\right)\cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{-C_1}F(\lambda)\right) \\ \qquad \pm \dfrac{1}{\sqrt{-C_1}}\sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2}\sin\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{-C_1}F(\lambda)\right). \end{array}\right.$$

De même la seconde équation (91), qui donne l'expression de $\varphi$ ou $r$ en fonction du temps, sera, en effectuant le même changement de notation dans les expressions du tableau (113) :

*c*) pour le cas de $C > 0$

$$(114^{bis})\quad \frac{1}{C}\sqrt{C_1 + kr + Cr^2} - \frac{k}{2C\sqrt{C}}l\left(r\sqrt{C} + \frac{k}{2\sqrt{C}} + \sqrt{C_1 + kr + Cr^2}\right) = \pm\sqrt{2}(t + C''),$$

d'où par conséquent pour $C''$ la valeur

$$C'' = \pm\frac{1}{\sqrt{2C}}\left[\sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2} - \frac{k}{2\sqrt{C}}l\left(r_0\sqrt{C} + \frac{k}{2\sqrt{C}} + \sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2}\right)\right],$$

qu'il faut supposer remise à la place de $C''$ dans l'équation qui précède ; et de même

*d*) pour le cas de $C < 0$

$$(115)\quad \frac{1}{C}\sqrt{C_1 + kr + Cr^2} + \frac{k}{2C\sqrt{-C}}\arccos\frac{2Cr + k}{\sqrt{k^2 - 4CC_1}} = \pm\sqrt{2}(t + C'')$$

d'où dans ce cas pour $C''$ la valeur

$$C'' = \pm\frac{1}{\sqrt{2C}}\left[\sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2} + \frac{k}{2\sqrt{-C}}\arccos\frac{2Cr_0 + k}{\sqrt{k^2 - 4CC_1}}\right],$$

qu'il faudra encore remettre à la place de $C''$ dans l'équation précédente : et par conséquent dans tous les cas la coordonnée $r$ sera déterminée en fonction du temps, par une équation transcendante où n'entreront que les seules transcendantes classiques *log*, *sin*, et *cos*.

Digitized by Google

Si l'on remarque que les deux formes (113ter) et (114) de l'équation de la trajectoire sont algébriques en $r$, et fournissent l'expression de $r$ en fonction de $\lambda$ par une équation du premier ou du second degré seulement, en résolvant cette équation, et reportant cette valeur de $r$ dans la seconde équation (114bis) ou (115), on aura de même la relation entre la coordonnée $\lambda$ et le temps, exprimée à l'aide des seules transcendantes classiques, et de la transcendante hyperelliptique $F(\lambda)$, qu'on peut toujours supposer calculée, à défaut d'autres moyens, à l'aide des procédés de quadrature approximative.

Comme problème plus simple, dont la solution peut être déduite à titre de cas particulier de celle que nous venons d'obtenir, supposons en terminant que la seconde force d'attraction, c'est-à-dire celle émanant de l'axe du cône devienne nulle, en sorte que le mobile soit simplement attiré par le sommet, en raison inverse du carré de la distance.

L'hypothèse $k_1 = 0$ ou $k' = 0$, introduite dans les formules (112), (112bis), (111) et (113bis), donnent successivement :

$$\left\{\begin{array}{l} C = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) - \frac{k}{\varphi_0}, \qquad C_1 = -\frac{1}{2} v_0^2 \varphi_0^2, \qquad G = DC_1, \\ \qquad G - c^2 C_1 \psi = DC_1 - c^2 C_1 \psi = C_1(D - c^2\psi), \\ F(\psi) = \int_{\psi_0}^{\psi} \sqrt{\frac{\psi(D - c^2\psi)}{f(\psi) C_1 (D - c^2\psi)}}\, d\psi = \frac{1}{\sqrt{-C_1}} \int_{\psi_0}^{\psi} \sqrt{\frac{\psi}{-f(\psi)}}\, d\psi, \end{array}\right.$$

nous en déduirons en récrivant encore dans ces dernières valeurs $r$ et $\lambda$ à la place de $\varphi$ et $\psi$,

$$\left\{\begin{array}{l} C_1 + k r_0 + C r_0^2 = -\frac{1}{2} v_0^2 r_0^2 + k r_0 + \left[\frac{1}{2}(u_0 + v_0^2) - \frac{k}{r_0}\right] r_0^2 = \frac{1}{2} u_0^2 r_0^2 \\ \sqrt{-C_1} F(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{-f(\lambda)}}\, d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{-\lambda(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}, \end{array}\right.$$

et dès lors la trajectoire, qui sera toujours dans ce cas exclusive-

Digitized by Google

ment représentée par l'équation (114), vu la valeur toujours négative de $C_1$ qui précède, deviendra dans ce nouveau problème

$$(115^{bis})\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{r}{r_0} = \dfrac{k}{v_0^2 r_0} + \left(1 - \dfrac{k}{v_0^2 r_0}\right)\cos\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{-\lambda(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\right) \\ \qquad\qquad \pm \dfrac{u_0}{v_0}\sin\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{-\lambda(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\right), \end{array}\right.$$

et ne dépendra plus alors, comme l'on voit, de même que la relation ($114^{bis}$) ou (115) entre $\lambda$ et $t$, que des fonctions elliptiques seulement. Et alors nos formules ($92^{bis}$) et ($92^{ter}$) nous donneront presque immédiatement, pour la grandeur du rayon de courbure en un point quelconque de cette trajectoire, l'expression suivante, où C représente la valeur que nous venons de spécifier pour ce cas :

$$R = \pm \frac{2^{\frac{5}{2}} r^2 (k + Cr)^{\frac{5}{2}} \lambda^{\frac{3}{2}}}{v_0 r_0 \sqrt{k^2 r \lambda^3 + 2a^2 b^2 c^2 v_0^2 r_0^2 (k + Cr)}}. \quad (*)$$

Les deux équations ($113^{ter}$) ou (114), et ($114^{bis}$) ou (115) résolvent la question que nous nous étions posée en premier lieu aussi complètement qu'on peut le demander, à l'aide des coordonnées coniques $r$, $\lambda$, et $\mu$, définies par nos équations (107), et qui seules, croyons-nous, permettent de pousser jusqu'au bout la solution d'un semblable problème. Elles nous rendront de nouveau un précieux service dans le paragraphe suivant, à l'occasion d'un problème important, en nous en fournissant encore une solution plus simple et plus complète que tout autre système de coordonnées.

---

(*) Le lecteur trouvera le calcul de cette expression, ainsi que la description exacte du mouvement correspondant à ce problème restreint, déduite de la discussion des équations intégrales ainsi obtenues, à la fin de la Note III de l'Appendice qui termine ce mémoire, sous la rubrique : II° *Cône du second ordre ; mouvement d'un point attiré par le sommet, en raison inverse du carré de la distance.*

Digitized by Google

2° *Sphère.* — Mais auparavant nous voulons encore faire ressortir l'utilité de ce nouveau système de coordonnées, et en même temps présenter un nouvel exemple de l'application de notre méthode, en traitant avec ce système, à la suite de M. C. NEUMANN, un intéressant problème, dont l'éminent géomètre fournit une solution simple et élégante, par le moyen des équations d'Hamilton et Jacobi (*).

Le problème en question consiste à déterminer le mouvement d'un point matériel astreint à demeurer sur une sphère, et soumis à l'attraction exercée, suivant la loi newtonienne, par la masse entière d'un ellipsoïde homogène immobile, dont le centre coïncide avec celui de la sphère, et qu'on suppose renfermer dans son intérieur le volume entier de ladite sphère.

A cet effet observons tout d'abord qu'en prenant les axes des coordonnées rectilignes dirigés suivant les axes mêmes de l'ellipsoïde en question, le point attiré étant par hypothèse constamment intérieur à la masse attirante, les composantes de la force qui le sollicite auront des expressions de la forme

$$X = -2a^2x, \qquad Y = -2b^2y, \qquad Z = -2c^2z,$$

et par suite la fonction des forces correspondante sera exprimée en coordonnées planes par

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \int (X dx + Y dy + Z dz) \\ &= -\int 2(a^2x dx + b^2y dy + c^2z dz) = -(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2), \end{aligned}$$

les constantes $a^2$, $b^2$, $c^2$, étant exprimées en fonction des axes de l'ellipsoïde attirant par des intégrales elliptiques que l'on trouve indiquées dans tous les traités de mécanique.

Cela posé, nous adopterons pour traiter ce problème le système des coordonnées coniques défini par nos formules (107), en ayant soin de prendre pour les constantes $a^2$, $b^2$, $c^2$, qui y figurent,

(*) « *De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultra-ellipticarum classem revocatur.* » (JOURNAL DE CRELLE, t. LVI, pp. 46-63, 1858.)

Digitized by Google

précisément les mêmes valeurs qui entrent dans l'expression des composantes ci-dessus X, Y, Z. Dès lors, pour transformer dans ce système de coordonnées l'expression qui précède de la fonction des forces F, il suffira d'observer que, les deux premières de ces équations (107) exprimant que $\lambda$ et $\mu$ sont les deux racines de l'équation du second degré

$$\frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}=0,$$

ou ce qui est la même chose, en chassant les dénominateurs, réduisant et ordonnant,

$$(x^2+y^2+z^2)\rho^2+\left[x^2(b^2+c^2)+y^2(c^2+a^2)+z^2(a^2+b^2)\right]\rho + x^2b^2c^2+y^2c^2a^2+z^2a^2b^2=0,$$

donne immédiatement la relation, en faisant toujours $r^2=x^2+y^2+z^2$,

$$\lambda+\mu=-\frac{1}{r^2}\left[x^2(b^2+c^2)+y^2(c^2+a^2)+z^2(a^2+b^2)\right]$$

$$=-\frac{1}{r^2}\left[r^2(a^2+b^2+c^2)-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\right],$$

d'où l'on tire aisément

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=r^2(\lambda+\mu+a^2+b^2+c^2).$$

Par suite l'on aura en substituant dans l'expression ci-dessus de la fonction des forces F, pour celle de la fonction $\mathcal{F}$

(115ter) $$\mathcal{F}(\lambda,\mu,r)=-r^2(\lambda+\mu+a^2+b^2+c^2),$$

et par conséquent enfin pour l'expression de $\mathcal{F}+C$, en posant encore, comme dans l'équation (99bis), $D=a^2+b^2+c^2$,

$$\mathcal{F}(\lambda,\mu,r)+C=-r^2(\lambda+\mu)-r^2D+C.$$

Convenant donc, pour faire l'application de notre méthode à la question proposée, de prendre dans cette dernière expression,

Digitized by Google

comme dans toutes les équations dont nous allons faire usage, pour unité de longueur le rayon de la sphère donnée, et récrivant en conséquence pour plus de clarté cette expression de $\mathcal{F} + C$, ainsi que celles (108) de H et K, en y faisant $\lambda = \varphi$, et $\mu = \psi$, $r = 1$, ainsi qu'il suit

$$\left\{\begin{array}{l} H = \Delta_1^{-2}\varphi = \dfrac{-1}{4f(\varphi)}(\varphi - \psi), \qquad K = \Delta_1^{-2}\psi = \dfrac{-1}{4f(\psi)}(\psi - \varphi), \\ \mathcal{F} + C = -\left[\varphi + \psi + D - C\right] \\ \qquad = -\dfrac{\varphi^2 + (D-C)\varphi - \left[\psi^2 + (D-C)\psi\right]}{\varphi - \psi}, \end{array}\right.$$

on voit, en comparant ces dernières valeurs avec celles exprimées par les formules (76), que les conditions exigées seront encore remplies, en prenant simplement

$$(116)\quad \left\{\begin{array}{ll} \Phi(\varphi) = \varphi, & \Psi(\psi) = \psi, \\ \Phi_1(\varphi) = -\left[\varphi^2 + (D-C)\varphi\right], & \Psi_1(\psi) = -\left[\psi^2 + (D-C)\psi\right], \\ \Phi_2(\varphi) = \dfrac{-1}{4f(\varphi)}, & \Psi_2(\psi) = \dfrac{-1}{4f(\psi)}. \end{array}\right.$$

Par conséquent, nos formules intégrales (80) nous fourniront immédiatement, en remettant $\lambda$ et $\mu$ à la place de $\varphi$ et $\psi$, et multipliant par 2 chaque équation, pour solution du problème les deux équations

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)\left[\lambda^2 + (D-C)\lambda - C_1\right]}} \\ \pm \displaystyle\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)\left[\mu^2 + (D-C)\mu - C_1\right]}} = 0, \\ \displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)\left[\lambda^2 + (D-C)\lambda - C_1\right]}} \\ \pm \displaystyle\int_{\mu_0}^{\lambda} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{f(\mu)\left[\mu^2 + (D-C)\mu - C_1\right]}} = \pm 2\sqrt{2}\,.\,t, \end{array}\right.$$



Digitized by Google

dans lesquelles les valeurs des coefficients des trinômes sous les radicaux s'obtiendront très aisément, en calculant celles des constantes C et $C_1$ par le moyen de nos formules (78) et (79), en tenant compte des expressions (115ter) et (116) des fonctions $\mathcal{F}$, $\Phi_1$, $\Psi_1$, et seront alors les suivantes :

$$D - C = -(\lambda_0 + \mu_0) - \tfrac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2),$$

$$-C_1 = -\lambda_0\mu_0 - \frac{1}{2}\frac{\mu_0 u_0^2 + \lambda_0 v_0^2}{u_0^2 + v_0^2}.$$

Les équations, auxquelles nous venons de parvenir, ne diffèrent que par un simple changement de notation de celles qu'obtient comme résultat M. Neumann (*loc. cit.*, formules (6), page 49), et dont il déduit ensuite, à l'aide d'une discussion savante et approfondie, la connaissance détaillée de toutes les circonstances du mouvement.

Exemple relatif au paraboloïde; discussion, et description complète du mouvement. — Proposons-nous enfin, comme dernier exemple, et pour terminer ce chapitre, de connaître le mouvement d'un point matériel, astreint à rester sur un paraboloïde donné (elliptique ou hyperbolique, mais non de révolution), et soumis, sans vitesse initiale, à la seule action de la pesanteur, dont on suppose la direction coïncider avec l'axe de figure de cette surface.

Pour traiter cette question, nous déduirons encore du système ellipsoïdal (94), à l'aide de considérations de limites analogues à celles qui nous ont fourni le système des coordonnées coniques employé pour les deux exemples précédents, nous déduirons encore, disons-nous, un nouveau système orthogonal, formé celui-là de trois paraboloïdes homofocaux, dont deux elliptiques, et le troisième hyperbolique, système auquel il sera toujours possible, comme nous allons le voir, de rattacher la surface donnée, et dont nous ferons usage pour appliquer nos formules.

Dans ce but, contrairement à ce que nous avions fait dans les exemples précédents, nous supposerons dans le système ellip-

Digitized by Google

soïdal (94) les trois constantes $a^2, b^2, c^2$, rangées par grandeur dans l'ordre suivant $a^2 < b^2 < c^2$, cette dernière étant supposée expressément positive (hypothèse nouvelle, qui ne change évidemment rien à l'exactitude des raisonnements et des calculs basés sur ce système, du moment que les trois équations de ce système sont parfaitement symétriques par rapport à ces trois quantités $a^2, b^2, c^2$), en supposant alors, bien entendu, au lieu des inégalités (93), les trois coordonnées elliptiques $\lambda, \mu, \nu$, renfermées de même respectivement entre les limites suivantes :

$$-c^2 < \lambda < -b^2 < \mu < -a^2 < -\nu < \infty .$$

Dès lors, pour obtenir le système orthogonal formé de trois paraboloïdes dont nous parlons, convenant de désigner pour un instant par $\rho$ l'une quelconque des trois coordonnées $\lambda$, $\mu$, $\nu$, en sorte que chacune des équations du système (94) puisse être représentée par

$$\frac{x^2}{a^2+\rho} + \frac{y^2}{b^2+\rho} + \frac{z^2}{c^2+\rho} = 1,$$

puis changeant d'abord dans cette équation $a^2$, $b^2$, $\rho$, et $z$, respectivement en $cp$, $cq$, $c\rho$, et $z - c$, ce qui la transformera dans la suivante

$$\frac{x^2}{c(p+\rho)} + \frac{y^2}{c(q+\rho)} + \frac{(z-c)^2}{c(c+\rho)} = 1,$$

équation qui peut encore être écrite en réduisant, puis multipliant par $c$,

$$\frac{x^2}{p+\rho} + \frac{y^2}{q+\rho} + \frac{z^2}{c+\rho} = \frac{2z+\rho}{1+\frac{\rho}{c}},$$

nous y ferons ensuite $c = \infty$, hypothèse qui la réduira simplement à :

(116bis) $$\frac{x^2}{p+\rho} + \frac{y^2}{q+\rho} = 2z + \rho.$$

D'où l'on voit que les trois surfaces qui composaient le système ellipsoïdal (94), lesquelles par cette transformation n'ont évidemment pas cessé à un instant quelconque d'être

Digitized by Google

orthogonales entre elles, sont devenues trois paraboloïdes dont les sections principales ont toutes leurs foyers sur l'axe des $z$, et situés quel que soit $\rho$, c'est-à-dire $\lambda$, $\mu$, $\nu$, aux deux points, $z' = \frac{\rho}{2}$ pour les sections principales situées dans le plan des $zx$, et $z'' = \frac{\rho}{2}$ pour celles situées dans le plan des $yz$.

Pour voir d'ailleurs à quel genre appartiennent séparément ces trois familles de paraboloïdes, il suffit d'introduire les mêmes changements de notation et hypothèses dans les inégalités de définition (93), lesquelles devenant alors

$$-c^2 < c\lambda < -cq < c\mu < -cp < c\nu,$$

ou en divisant d'abord par $c = +\sqrt{c^2}$ ($c^2$ étant supposé pris positif), puis faisant ensuite $c = \infty$,

$$(117) \qquad -\infty < \lambda < -q < \mu < -p < \nu < +\infty,$$

donnent respectivement pour chacune des trois surfaces

$$\begin{cases} p+\lambda < 0, & p+\mu < 0, & p+\nu > 0, \\ q+\lambda < 0, & q+\mu > 0, & q+\nu > 0; \end{cases}$$

d'où il suit que la seconde surface, au paramètre $\mu$, seule, est un paraboloïde hyperbolique, et que les deux autres sont elliptiques, ayant bien tous deux pour axe de figure l'axe des $z$, mais leur concavité tournée chacun en sens contraire l'un de l'autre.

En opérant les mêmes changements dans les trois formules de droite (94), elles deviendront semblablement :

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{(cp+c\lambda)(cp+c\mu)(cp+c\nu)}{(cp-cq)(cp-c^2)} = \dfrac{(p+\lambda)(p+\mu)(p+\nu)}{(p-q)\left(\dfrac{p}{c}-1\right)}, \\ y^2 = \dfrac{(cq+c\lambda)(cq+c\mu)(cq+c\nu)}{(cq-c^2)(cq-cp)} = \dfrac{(q+\lambda)(q+\mu)(q+\nu)}{\left(\dfrac{q}{c}-1\right)(q-p)}, \\ (z-c)^2 = \dfrac{(c^2+c\lambda)(c^2+c\mu)(c^2+c\nu)}{(c^2-cp)(c^2-cq)} = \dfrac{c^3(c+\lambda)(c+\mu)(c+\nu)}{c^4\left(1-\dfrac{p}{c}\right)\left(1-\dfrac{q}{c}\right)}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Les deux premières donneront donc immédiatement pour $c = \infty$ :

$$(117^{bis}) \qquad x^2 = -\frac{(p+\lambda)(p+\mu)(p+\nu)}{p-q}, \qquad y^2 = -\frac{(q+\lambda)(q+\mu)(q+\nu)}{q-p}.$$

Quant à la troisième, si après l'avoir développée ainsi qu'il suit

$$z^2 - 2cz + c^2 = \frac{(c+\lambda)(c+\mu)(c+\nu)}{c\left[1 - \frac{p+q}{c} + \frac{pq}{c^2}\right]},$$

on chasse le dénominateur, et qu'on fasse attention dans le développement des deux membres aux seuls termes en $c^2$ (les termes en $c^3$ disparaissant d'eux-mêmes), ce qui donnera

$$-(2z+p+q)c^2 + (\cdots)c + \cdots = (\lambda+\mu+\nu)c^2 + (\cdots)c + \cdots,$$

il est clair qu'en divisant alors par $c^2$, puis faisant ensuite $c = \infty$, ces mêmes termes subsisteront seuls, et l'équation se réduira par suite à

$$-(2z+p+q) = \lambda+\mu+\nu,$$

ou

$$(118) \qquad z = -\tfrac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu+p+q),$$

ces valeurs ($117^{bis}$) et (118) de $x^2$, $y^2$, et $z$ coïncidant, bien entendu, avec celles que l'on eût obtenu directement en résolvant le système des trois équations ($116^{bis}$).

Enfin, le même changement de notation opéré de nouveau sur la formule (95), nous donnera, en n'écrivant pour abréger que le premier terme,

$$ds^2 = \frac{1}{4}\frac{(c\lambda - c\mu)(c\lambda - c\nu)}{(cp+c\lambda)(cq+c\lambda)(c^2+c\lambda)}(cd\lambda)^2 + \cdots + \cdots$$

$$= \frac{1}{4}\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(p+\lambda)(q+\lambda)\left(1+\frac{\lambda}{c}\right)}d\lambda^2 + \cdots + \cdots,$$

Digitized by Google

et en opérant de même sur les trois termes, puis faisant ensuite $c = \infty$, il est clair que l'on obtiendra ainsi pour expression de l'élément d'arc dans ce système de coordonnées

$$ds^2 = \frac{1}{4}\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(p+\lambda)(q+\lambda)}d\lambda^2 + \frac{1}{4}\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(p+\mu)(q+\mu)}d\mu^2 + \frac{1}{4}\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(p+\nu)(q+\nu)}d\nu^2,$$

d'où il résultera ensuite, par comparaison avec l'expression générale $ds^2 = \Delta_1^{-2}\lambda \,.\, d\lambda^2 + \Delta_1^{-2}\mu \,.\, d\mu^2 + \Delta_1^{-2}\nu \,.\, d\nu^2$, les trois valeurs dont nous avons besoin pour appliquer notre théorie, savoir :

$$(118^{bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \Delta_1^{-2}\lambda = \dfrac{1}{4}\dfrac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(p+\lambda)(q+\lambda)}, \qquad K = \Delta_1^{-2}\mu = \dfrac{1}{4}\dfrac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(p+\mu)(q+\mu)}. \\ \qquad\qquad J = \Delta_1^{-2}\nu = \dfrac{1}{4}\dfrac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(p+\nu)(q+\nu)}. \end{array} \right.$$

Ces formules générales une fois acquises, pour résoudre le problème que nous nous sommes proposé, nous rapporterons la surface donnée à ses plans principaux comme plans des $xz$ et des $yz$, et à son sommet comme origine, de manière que son équation en coordonnées planes sera alors de la forme :

$$(119) \qquad \frac{x^2}{P} + \frac{y^2}{Q} = 2z.$$

De plus, si c'est un paraboloïde elliptique, nous prendrons la partie positive de l'axe des $z$ dans l'intérieur de la surface, de sorte que l'on aura déjà d'une part $P>0$ et $Q>0$, puis, en outre, les axes des $x$ et des $y$ disposés de telle façon que l'on ait en même temps $P<Q$. De même, si c'est un paraboloïde hyperbolique, les deux paramètres P et Q étant alors de signes contraires, nous choisirons les axes des $x$ et des $y$ de façon que l'on ait $P<0$ et $Q>0$, en sorte que l'on aura encore comme dans l'autre cas $P<Q$, le sens de l'axe des $z$ restant dans ce cas arbitraire.

Moyennant ces précautions, il est facile de voir que l'on pourra toujours rattacher la surface donnée (119), pour la

Digitized by Google

valeur zéro du paramètre, soit à la deuxième, soit à la troisième famille du système des trois surfaces (116bis). Car les quatre quantités $p$, $q$, $\mu$ et $\nu$, n'étant assujetties par définition, d'après les inégalités (117), seulement qu'aux trois conditions

$$-q < \mu < -p < \nu,$$

ou bien

$$\begin{cases} p < q, & p + \mu < 0, & q + \mu > 0, \\ & p + \nu > 0, & q + \nu > 0, \end{cases}$$

on voit de suite, d'après ce que nous venons de dire, que ces diverses conditions seront bien remplies en prenant simplement $p = P$ et $q = Q$ en même temps que $\mu = 0$, si la surface (119) est un paraboloïde hyperbolique, ou que $\nu = 0$, si c'est un paraboloïde elliptique.

Plaçons-nous donc, pour fixer les idées, dans cette dernière hypothèse, et supposons également que l'action de la pesanteur s'exerce en sens contraire de l'axe des $z$ que nous avons choisi sans ambiguïté dans ce cas, ainsi que nous venons de le dire, les composantes de la force accélératrice qui sollicite le mobile étant alors $X = 0, Y = 0, Z = -g$ (dans l'hypothèse contraire relative au sens de la pesanteur, il suffirait évidemment d'attribuer à la constante $g$ une valeur négative) la fonction des forces correspondante $F(x, y, z)$ aura pour expression, dans les mêmes circonstances, en coordonnées rectilignes $— gz$, ou ce qui est la même chose, en coordonnées paraboliques, par suite de la valeur (118) de $z$ :

$$(119^{bis}) \qquad \mathcal{F}(\lambda, \mu, \nu) = \tfrac{1}{2} g(\lambda + \mu + \nu + p + q),$$

et par conséquent pour tous les points de la surface $\nu = 0$, sur laquelle le mobile est astreint à rester, l'on aura :

$$\mathcal{F}(\lambda, \mu, 0) + C = \tfrac{1}{2} g(\lambda + \mu + p + q) + C.$$

Récrivant donc cette dernière valeur, ainsi que celles (118bis) que nous venons de trouver pour H et K dans ce système de coor-

Digitized by Google

données, en y faisant à la fois $\lambda = \varphi$, $\mu = \psi$, $\nu = 0$, les expressions

$$\left\{\begin{aligned} H = \Delta_1^{-2}\varphi &= \frac{1}{4}\frac{\varphi}{(p+\varphi)(q+\varphi)}(\varphi-\psi), \\ K = \Delta_1^{-2}\psi &= \frac{1}{4}\frac{\psi}{(p+\psi)(q+\psi)}(\psi-\varphi), \\ \mathcal{F}+C &= \frac{1}{2}g\left(\varphi+\psi+p+q+\frac{2C}{g}\right) \\ &= \frac{1}{2}g\cdot\frac{\varphi^2+\left(p+q+\frac{2C}{g}\right)\varphi-\left[\psi^2+\left(p+q+\frac{2C}{g}\right)\psi\right]}{\varphi-\psi}, \end{aligned}\right.$$

étant rapprochées des formules (76), montrent qu'il suffira encore pour appliquer notre théorie de faire comme plus haut

$$(120)\qquad \left\{\begin{aligned} \Phi(\varphi) &= \varphi, & \Psi(\psi) &= \psi, \\ \Phi_1(\varphi) &= \frac{1}{2}g\left[\varphi^2+\left(p+q+\frac{2C}{g}\right)\varphi\right], & \Psi_1(\psi) &= \frac{1}{2}g\left[\psi^2+\left(p+q+\frac{2C}{g}\right)\psi\right], \\ \Phi_2(\varphi) &= \frac{1}{4}\frac{\varphi}{(p+\varphi)(q+\varphi)}, & \Psi_2(\psi) &= \frac{1}{2}\frac{\psi}{(p+\psi)(q+\psi)}, \end{aligned}\right.$$

moyennant quoi nos formules (77) ou (80) nous fourniront encore immédiatement la solution du problème.

Mais pour obtenir ces résultats sous une forme simple et facile à interpréter, il convient de déterminer préalablement la valeur des constantes C et $C_1$, à l'aide des formules (78) et (A) (note de la page 59, *in fine*), cette dernière tenant lieu de la formule (79), à cause de l'hypothèse admise de la vitesse initiale nulle. A cet effet, la première de ces deux formules nous donnant, en ayant égard à la valeur ci-dessus (119$^{bis}$) de la fonction $\mathcal{F}$,

$$C = -\mathcal{F}(\varphi_0, \psi_0, 0) = -\tfrac{1}{2}g(\varphi_0+\psi_0+p+q),$$

valeur, d'où nous concluerons successivement

$$\frac{2C}{g} = -(\varphi_0+\psi_0+p+q) \qquad \text{et} \qquad p+q+\frac{2C}{g} = -(\varphi_0+\psi_0),$$

Digitized by Google

les expressions ci-dessus (120) des fonctions $\Phi_1(\varphi)$ et $\Psi_1(\psi)$ deviendront, en substituant cette valeur, les suivantes

$$\Phi_1(\varphi) = \tfrac{1}{2} g\left[\varphi^2 - (\varphi_0 + \psi_0)\varphi\right], \qquad \Psi_1(\psi) = \tfrac{1}{2} g\left[\psi^2 - (\varphi_0 + \psi_0)\psi\right],$$

lesquelles donnant à leur tour

$$\Phi_1(\varphi_0) = \Psi_1(\psi_0) = \tfrac{1}{2} g(-\varphi_0\psi_0),$$

réduiront à première vue la valeur de $C_1$ fournie par la formule (A) précitée (le dénominateur apparaissant alors comme l'un des facteurs du numérateur), à l'expression simple,

$$C_1 = -\left[\tfrac{1}{2} g(-\varphi_0\psi_0)\right] = \tfrac{1}{2} g\varphi_0\psi_0;$$

et par suite l'on aura enfin, en se reportant aux valeurs des fonctions $\Phi_1(\varphi)$ et $\Psi_1(\psi)$ que nous venons d'écrire,

$$(120^{bis}) \quad \begin{cases} \Phi_1(\varphi) + C_1 = \tfrac{1}{2} g\left[\varphi^2 - (\varphi_0 + \psi_0)\varphi + \varphi_0\psi_0\right] = \tfrac{1}{2} g(\varphi_0 - \varphi)(\psi_0 - \varphi), \\ \Psi_1(\psi) + C_1 = \tfrac{1}{2} g\left[\psi^2 - (\varphi_0 + \psi_0)\psi + \varphi_0\psi_0\right] = \tfrac{1}{2} g(\varphi_0 - \psi)(\psi_0 - \psi). \end{cases}$$

Avec ces expressions ainsi calculées, et celles écrites plus haut (120) des fonctions $\Phi(\varphi)$, $\Psi(\psi)$, $\Phi_2(\varphi)$, $\Psi_2(\psi)$, nos formules (80) nous donneront pour solution complète du problème les deux équations

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\frac{\varphi}{4(p+\varphi)(q+\varphi)(\frac{1}{2}g)(\varphi_0-\varphi)(\psi_0-\varphi)}}\, d\varphi \\ \displaystyle \pm \int_{\psi_0}^{\psi} \sqrt{\frac{\psi}{4(p+\psi)(q+\psi)(\frac{1}{2}g)(\varphi_0-\psi)(\psi_0-\psi)}}\, d\psi = 0, \\ \displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\frac{\varphi}{4(p+\varphi)(q+\varphi)(\frac{1}{2}g)(\varphi_0-\varphi)(\psi_0-\varphi)}}\, \varphi d\varphi \\ \displaystyle \pm \int_{\psi_0}^{\psi} \sqrt{\frac{\psi}{4(p+\psi)(q+\psi)(\frac{1}{2}g)(\varphi_0-\psi)(\psi_0-\psi)}}\, \psi d\psi = \pm\sqrt{2}.t; \end{cases}$$

Digitized by Google

ou définitivement, en multipliant tous les termes par $\sqrt{2g}$, et remettant ensuite à la place des lettres $\varphi$ et $\psi$, les coordonnées $\lambda$ et $\mu$, qu'elles étaient censées représenter, puis convenant, pour plus de simplicité, que chaque radical emporte avec lui son signe, ces deux autres équations

$$(121)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}} \\ \displaystyle -\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}} = 0, \text{ (*)} \\ \displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}} \\ \displaystyle -\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{\mu(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}} = \pm 2\sqrt{g}\,.\,t; \end{cases}$$

et en même temps nos formules ($80^{bis}$) et ($80^{ter}$) fourniront aisément pour les composantes de la courbure, en un point quelconque de la trajectoire représentée par la première de

---

(*) Il semble à première vue, la constante $g$ (dont le signe spécifie, ainsi que nous l'avons dit, le sens de la pesenteur) n'apparaissant pas en évidence dans la première de ces deux équations, que la trajectoire ne dépende en rien du sens de son action relativement à la surface, résultat évidemment absurde; mais ce n'est là qu'une illusion, attendu les limites absolument différentes, entre lesquelles chacune des coordonnées $\lambda$ et $\mu$ est astreinte à varier dans les deux cas, comme nous allons le montrer. Mais sans aborder même cette discussion, on peut également réduire à néant cette apparente contradiction, en se rappelant que c'est par hypothèse le même radical qui entre dans les deux intégrales relatives à chaque coordonnée $\lambda$ ou $\mu$, dans les deux équations. Or, la seconde équation (121) fait voir que lorsque $g$ est négatif, il y a nécessité de multiplier tous les termes de la seconde équation par $\sqrt{-1}$, ou ce qui est la même chose, d'introduire le facteur $-1$ sous chaque radical, pour que l'équation ait lieu entre quantités réelles. Si donc on se borne à considérer les points réels de la trajectoire, qui offrent seuls un intérêt au point de vue du problème mécanique, on voit ainsi que ce ne sont pas en réalité les mêmes intégrales qui figurent dans la première équation (121) pour les deux hypothèses de $g > 0$ et $g < 0$, ou en d'autres termes que l'équation de la trajectoire est bien véritablement différente dans les deux cas.

Digitized by Google

ces deux équations, les expressions (voir la note III de l'appendice)

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}{(\lambda-\mu)^3}}} = \dfrac{V}{\sqrt{\dfrac{(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}{(\mu-\lambda)^3}}} \\ = \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{\lambda}(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)} + \sqrt{\dfrac{1}{\mu}(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}}{(\lambda-\lambda_0+\mu-\mu_0)^2} \\ W = \dfrac{\sqrt{\dfrac{pq}{\lambda\mu}}\left[\dfrac{1}{\lambda}(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda) - \dfrac{1}{\mu}(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)\right]}{(\lambda-\mu)(\lambda_0-\lambda+\mu_0-\mu)}. \end{array}\right.$$

Ces formules, qui résolvent complètement la question, permettent de se rendre compte, à l'aide de considérations purement élémentaires, de toutes les principales circonstances du mouvement.

Pour faire cette discussion d'une façon complète, il conviendra d'examiner séparément les trois cas suivants.

1° Le paraboloïde étant supposé elliptique, et la pesanteur attirant le mobile vers le sommet, c'est-à-dire la constante $g$ étant positive, comme il résulte immédiatement des inégalités de définition (117) que, parmi les cinq facteurs qui entrent sous le radical dans la première des intégrales de chacune de ces deux équations, les trois premiers c'est-à-dire $\lambda$, $p+\lambda$, $q+\lambda$ sont négatifs, le dernier $\mu_0-\lambda$ étant au contraire positif, le facteur restant $\lambda_0-\lambda$ devra donc être aussi négatif pour que l'intégrale reste réelle, c'est-à-dire que $\lambda$ sera astreint à varier entre $\lambda_0$ comme limite inférieure et $-q$ comme limite supérieure. Et de même, parmi les cinq facteurs qui entrent sous le radical de la seconde intégrale, trois sont encore négatifs, savoir $\mu$, $p+\mu$, $\lambda_0-\mu$, et un positif, savoir $q+\mu$; il faudra donc encore que le facteur restant, à savoir $\mu_0-\mu$, soit aussi négatif, ce qui signifie

Digitized by Google

que la coordonnée $\mu$ sera astreinte à varier entre $\mu_0$ comme limite inférieure, et $-p$ comme limite supérieure. (*)

(*) Lorsque la valeur initiale donnée $\lambda_0$ sera précisément égale à l'autre limite que nous venons de reconnaître pour la coordonnée $\lambda$, à savoir la valeur $-q$, le champ assigné à sa variation se réduisant alors à zéro, il suit de là nécessairement que cette coordonnée restera alors pendant toute la durée du mouvement constamment égale à cette valeur $\lambda_0 = -q$. L'équation $\lambda = -q$ sera donc dans ce cas l'équation même de la trajectoire, en remplacement de la première équation (121), qui est alors indéterminée, en raison de ce que la première intégrale le devient également. Or la seconde équation (117bis), qui pour $\lambda = -q$ donne $y^2 = 0$, quelle que soit la valeur finie attribuée à $\mu$, montre que cette trajectoire ne sera autre que la section principale des $xz$, à laquelle on suppose alors qu'appartient la position initiale. Semblablement si la valeur initiale de la coordonnée $\mu$ est supposée égale à l'autre limite $-p$, assignée à la variation de $\mu$, on aura forcément à toute époque $\mu = \mu_0 = -p$, et la trajectoire représentée alors par cette équation au lieu et place de la première équation (121) qui perd encore toute signification déterminée, sera de même l'autre section principale ou des $yz$, attendu que la première équation (117bis) donne constamment $x^2 = 0$, pour $\mu = -p$, quelle que soit la valeur finie attribuée à $\lambda$. Ces deux résultats étaient d'ailleurs évidents *à priori*, la vitesse initiale étant supposée nulle et la force constamment parallèle à l'axe de figure de la surface, par une simple considération de symétrie (qui se produirait quelle que soit la position initiale, si l'on supposait la surface de révolution), aucune raison d'aucun genre n'intervenant alors pour faire sortir le mobile à un instant quelconque de la section principale sur laquelle on le suppose placé à l'origine de son mouvement.

Dans ces deux hypothèses, la trajectoire du mobile passera donc par le sommet du paraboloïde; mais il est facile de voir que, hormis ces deux cas simples qui étaient aisés à reconnaître *à priori*, et une autre hypothèse particulière plus complexe que nous allons indiquer tout à l'heure, en général le point mobile ne se trouvera à aucune époque du mouvement au sommet du paraboloïde; car pour que le sommet fût un des points de la trajectoire, il faudrait que ses deux coordonnées, savoir $\lambda = -q$ et $\mu = -p$, vérifiassent simultanément la première équation (121), c'est-à-dire que l'on eût en séparant en deux membres :

$$\int_{\lambda_0}^{-q} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda(\mu+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}} = \int_{\mu_0}^{-p} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}}.$$

Or, il est évident que ces deux intégrales qui sont des fonctions différentes de $\lambda_0$ et $\mu_0$, et des mêmes constantes $p$ et $q$, ne représenteront des quantités égales, que si l'on suppose que les coordonnées initiales $\lambda_0$ et $\mu_0$ vérifient une certaine condition, à savoir celle exprimée par cette dernière égalité elle-même.

On se rendra compte d'ailleurs également sans difficulté, par voie intuitive, de cette conclusion (dont l'énoncé pourra peut-être au premier abord causer quelque étonnement, en raison de ce que le sommet du paraboloïde est par hypothèse le point le plus bas de la surface), en réfléchissant qu'en général le motif de symétrie que nous signalions tout à l'heure n'existe pas, quant au point de vue géométrique, relativement à la section verticale menée par l'axe de la surface et la position initiale du mobile; qu'il n'y a donc plus aucune raison

Digitized by Google

Ce premier point acquis, il est facile de voir que chacune de ces deux coordonnées $\lambda$ et $\mu$ parcourra effectivement d'une façon continue tout l'intervalle que nous venons de lui assigner, et que la loi de sa variation consistera dès lors en une succession d'oscillations entre les deux limites correspondantes.

En effet nos deux équations (75) et (75$^{ter}$) (dans laquelle on fera abstraction du membre intermédiaire), étant dans le cas actuel, en y introduisant à la place des fonctions $\Phi, \Psi, \Phi_2, \Psi_2, \Phi_1 + C_1, \Psi_1 + C_1$, les valeurs qui précèdent (120) et (120$^{bis}$), dans lesquelles on aura remis $\lambda$ et $\mu$ au lieu de $\varphi$ et $\psi$,

$$(121^{bis})\quad \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int \sqrt{\frac{\lambda}{4(p+\lambda)(q+\lambda)\cdot\frac{1}{2}g(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}}\,d\lambda \\ \displaystyle = \mp \int \sqrt{\frac{\mu}{4(p+\mu)(q+\mu)\cdot\frac{1}{2}g(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}}\,d\mu = du, \\ \displaystyle dt = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda-\mu)\,du, \end{array} \right.$$

on aura en les divisant membre à membre, après les avoir élevées au carré,

$$\frac{\lambda}{2g(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = \frac{\mu}{2g(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\frac{1}{2}(\lambda-\mu)^2},$$

ou séparément

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{\lambda(\lambda-\mu)^2}(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda), \\ \displaystyle\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{\mu(\mu-\lambda)^2}(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu), \end{array} \right.$$

---

de penser que cette section sera précisément la trajectoire; et que dès lors, une fois sorti de cette section, les vitesses normales relativement à ce plan dont il sera alors animé constituent en général une raison suffisante pour qu'il ne passe plus par le point le plus bas de la surface, de même que dans le problème du pendule conique le mobile ne passe pas non plus pour cette même cause par la verticale du point de suspension, qui est dans ce cas le point le plus bas de la sphère.

Digitized by Google

valeurs qui montreront, eu égard aux limites de définition (117), que les dérivées $\frac{d\lambda}{dt}$ et $\frac{d\mu}{dt}$ ne peuvent s'annuler, et par conséquent aussi changer de signe, que pour les seules valeurs $\lambda = \lambda_0$ ou $\lambda = -q$ pour la première, et $\mu = \mu_0$ ou $\mu = -p$ pour la seconde, d'où il suit que les valeurs des coordonnées $\lambda$ et $\mu$ oscilleront bien indéfiniment entre les mêmes limites.

En outre la dernière des équations ci-dessus ($121^{bis}$), que l'on peut adopter comme définition de la variable auxiliaire $u$ (avec la condition $u = 0$ pour $t = 0$), en prenant arbitrairement *une fois pour toutes* l'un des doubles signes qui y figurent, montre également, le facteur $\lambda - \mu$ restant constamment de même signe en vertu toujours des mêmes inégalités de définition (117), que la variable auxiliaire $u$ variera constamment, soit dans le même sens que $t$, soit en sens contraire, suivant le signe que l'on aura adopté. D'où l'on peut conclure immédiatement qu'elle prendra sucessivement, de même que $t$, tous les états de grandeur en valeur absolue depuis zéro jusqu'à l'infini, car si après l'avoir intégrée de 0 à $u$, ce qui donnera

$$(121^{ter}) \qquad \int_0^u \lambda du - \int_0^u \mu du = \pm \sqrt{2}\,.\,t,$$

l'on fait ensuite $t = \infty$, il faudra nécessairement que l'une au moins des deux intégrales du premier membre soit infinie, ce qui ne pourra arriver, l'élément de cette intégrale $\lambda du$ où $\mu du$ restant constamment fini, que moyennant que la limite supérieure $u$ sera elle-même infinie. On pourra donc dès lors la prendre pour variable indépendante à la place de $t$, en vue de faciliter la discussion des résultats qui précèdent.

Cela posé, les deux premières équations ($121^{bis}$), que l'on peut écrire séparément, en entendant encore que chaque radical emporte avec lui son signe,

$$(122) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\lambda d\lambda}{\sqrt{2g}\sqrt{\lambda(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}} \\ = \dfrac{\mu d\mu}{\sqrt{2g}\sqrt{\mu(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}} = du, \end{array} \right.$$

Digitized by Google

ou ce qui est la même chose, leurs intégrales

$$(122^{bis}) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda} \dfrac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}} = u, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \displaystyle\int_{\mu_0}^{\mu} \dfrac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}} = u, \end{cases}$$

montreront de nouveau que chaque fois que l'une des variables $\lambda$ ou $\mu$ passera par l'une de ses limites, il faudra en même temps changer le signe du radical qui y figure, car dans les mêmes circonstances la différentielle $d\lambda$ ou $d\mu$ changeant à chaque fois de signe, c'est le seul moyen que le second membre $du$ de ces mêmes équations conserve indéfiniment le même signe, ainsi que cela est nécessaire, d'après ce que nous venons de dire.

On déduira immédiatement de l'ensemble de ces conditions, à l'aide d'un mode de raisonnement très connu, que si l'on considère les deux coordonnées $\lambda$ et $\mu$ comme deux fonctions de la variable auxiliaire $u$, définies séparément par ces deux dernières équations intégrales (122$^{bis}$), et même en se bornant à considérer simplement les valeurs réelles de cette variable indépendante $u$, ces deux coordonnées seront des fonctions périodiques de cette variable, dont les périodes seront respectivement $2u_1$ et $2u_2$, $u_1$ et $u_2$ désignant les deux quantités de même signe (*)

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \displaystyle\int_{\lambda_0}^{-q} \dfrac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}}, \\ u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \displaystyle\int_{\mu_0}^{-p} \dfrac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}}, \end{cases}$$

(*) En effet, supposons que dans la dernière équation (121$^{bis}$) nous ayons fait choix du signe + de manière que, le facteur $\lambda - \mu$ étant par définition constamment négatif, $du$ sera toujours de signe contraire à $dt$, c'est-à-dire négatif. Alors, pour ce qui est de la coordonnée $\lambda$ par exemple, dans les premiers instants du mouvement $\lambda$ partant de $\lambda_0$ comme limite inférieure, $d\lambda$ est positif, et par ailleurs $\lambda$ étant lui-même négatif par définition, le numérateur de la première valeur (122) de $du$, à savoir $\lambda d\lambda$ est donc négatif, et

Digitized by Google

(le radical étant supposé pris avec le même signe dans les deux expressions) quantités qui seront toujours finies, attendu que l'*ordre d'infinité* (*) de la fonction sous le signe $\int$ est pour l'une

---

par conséquent tant que $\lambda$ n'aura pas atteint sa limite supérieure $-q$, il faudra prendre au dénominateur de la même expression le radical avec le signe $+$. Cela posé, désignons pour plus de clarté par $(u)$ la valeur de la première intégrale (122bis), correspondant dans ce premier intervalle à la valeur particulière $(\lambda)$ de la coordonnée $\lambda$, et examinons pour les époques successives la loi de variation de cette intégrale $u$, considérée comme fonction de $\lambda$. Lorsque $\lambda$ atteindra sa première limite $-q$, la fonction $u$ aura acquis la valeur que nous désignons dans le texte par $u_1$ (en entendant pour le raisonnement présent que le radical y soit pris avec le signe $+$). A partir de cet instant, et pour toute la durée pendant laquelle $\lambda$ varie de $-q$ à $\lambda_0$, il faudra, comme nous l'avons expliqué, changer le signe du radical qui entre dans les équations (122), c'est-à-dire sous le signe $f$ dans l'expression de la fonction $u$. Il s'ensuit que l'accroissement de cette fonction $u$ correspondant à cet intervalle sera

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{-q}^{\lambda_0}\frac{\lambda d\lambda}{-\sqrt{\lambda(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{\lambda_0}^{-q}\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}}=u_1,$$

et sa valeur au bout de cette période, lorsque $\lambda$ est revenu à sa valeur initiale $\lambda_0$, sera ainsi $2u_1$. A partir de cet instant, et jusqu'à ce que $\lambda$ atteigne de nouveau la valeur $-q$, le radical de l'intégrale reprend le signe $+$, comme dans le premier intervalle, et par conséquent l'accroissement de la fonction $u$ à partir de cet instant, jusqu'à ce que la coordonnée $\lambda$ repasse de nouveau par la valeur $(\lambda)$ sera encore $(u)$; d'où il suit que sa valeur totale acquise depuis l'origine du mouvement, c'est-à-dire sa valeur effective à ce dernier instant sera $2u_1+(u)$; résultat qui suffit pour établir la périodicité de la coordonnée $\lambda$, considérée comme fonction de $u$, du moment que l'on peut continuer indéfiniment ce même mode de raisonnement, et l'on reconnaîtrait exactement de la même façon la périodicité de la fonction $\mu$ définie par la seconde équation intégrale (122bis).

SERRET dans son excellent *Cours de calcul différentiel et intégral* (tome II, § 509-514, pp. 156-168) prétend établir par ce seul raisonnement, et sans avoir égard à la considération des valeurs imaginaires de la variable, le caractère fondamental de la périodicité dans les fonctions circulaires ou elliptiques, les fonctions $x=\sin u$, ou $x=\sin am\, u$ étant définies comme les fonctions inverses des intégrales que l'on sait. A la vérité, dans cette question d'analyse pure, même pour l'objet restreint qu'il se propose, ce mode de raisonnement paraîtra sans doute à tout le monde tout à fait insuffisant, attendu qu'en se bornant, comme il le fait, à considérer les seules valeurs réelles de la variable $x$, rien ne montre qu'il faille *nécessairement* changer le signe du radical, toutes les fois que cette variable atteint l'une de ses limites. Mais l'on ne saurait adresser le même reproche au raisonnement qui précède, du moment que nous avons fait voir expressément que cette nécessité résultait clairement dans le cas actuel des équations antérieures de la théorie, c'est-à-dire en fait des conditions mécaniques de la question elle-même.

(*) Voir JORDAN, *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, t. II, § 76, p. 85.

Digitized by Google

et l'autre intégrale égale à $\frac{1}{2}$ ; et l'on reconnaitra en même temps qu'aux époques successives correspondant aux valeurs $0, u_1, 2u_1, 3u_1, \ldots$ de la variable $u$, les valeurs de la coordonnée $\lambda$ seront alternativement $\lambda_0$ et $-q$, et de même qu'aux époques correspondant aux valeurs $0, u_2, 2u_2, 3u_2, \ldots$ de la même variable, les valeurs de $\mu$ seront alternativement $\mu_0$ et $-p$.

En conséquence, sauf le cas ou les deux quantités $u_1$ et $u_2$ seraient deux nombres incommensurables entre eux, comme on pourra toujours trouver deux nombres entiers positifs, $m$ et $n$, tels que l'on ait :

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{n}{m} \qquad \text{ou} \qquad mu_1 = nu_2,$$

il est clair que lorsque la variable $u$ se sera accrue de la quantité

$$U = 2mu_1 = 2nu_2 = mu_1 + nu_2,$$

les deux coordonnées $\lambda$ et $\mu$ reprendront simultanément la même valeur, et par conséquent en général (sauf la restriction que nous venons de dire), le mouvement sera périodique relativement à la variable auxiliaire $u$.

Ce premier résultat acquis, on reconnaitra sans peine que l'intervalle de temps T correspondant à des accroissements successifs égaux à U de la variable $u$, est bien aussi une quantité constante, en sorte que le mouvement sera également périodique relativement au temps, et la durée T sera précisément ce que l'on appelle la période du mouvement.

Pour s'en assurer il suffira d'intégrer entre les limites $k$U et $(k+1)$ U, $k$ désignant un nombre entier quelconque, la dernière équation ($121^{bis}$) qui définit $u$ en fonction de $t$, ou ce qui revient au même, qui exprime $t$ en fonction de $u$, opération qui fournira, comme on va le voir, un résultat indépendant du nombre entier $k$ qui particularise le rang de l'accroissement U donné à la variable $u$.



Digitized by Google

En effet, ayant posé par définition

$$T=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{kU}^{(k+1)U}(\lambda-\mu)du=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\int_{kU}^{(k+1)U}\lambda du-\int_{kU}^{(k+1)U}\mu du\right],$$

pour calculer chacune des deux intégrales qui figurent dans cette expression, nous partagerons le champ d'intégration de la première, à savoir $U=2mu_1$ en $2m$ parties égales chacune à $u_1$, et de même le champ d'intégration de la seconde, qui est semblablement $U=2nu_2$, en $2n$ parties égales chacune à $u_2$, ce qui permettra d'écrire ainsi cette même expression :

$$T=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\int_{2mku_1}^{(2mk+1)u_1}\lambda du+\int_{(2mk+1)u_1}^{(2mk+2)u_1}\lambda du+\cdots+\int_{(2mk+2m-1)u_1}^{(2mk+2m)u_1}\lambda du\right.$$
$$\left.-\left(\int_{2nku_2}^{(2nk+1)u_2}\mu du+\int_{(2nk+1)u_2}^{(2nk+2)u_2}\mu du+\cdots+\int_{(2nk+2n-1)u_2}^{(2nk+2n)u_2}\mu du\right)\right].$$

Or, sous cette dernière forme, si l'on remplace dans les $2m$ intégrales de la première ligne la différentielle $du$ par la première de ses valeurs (122), ce qui les transformera chacune en une intégrale relative à $\lambda$, et de même dans les $2n$ intégrales de la deuxième ligne $du$ par sa seconde valeur (122), ce qui les transformera toutes en intégrales relatives à $\mu$, puis qu'on se rappelle les valeurs que nous avons reconnues séparément à chacune des coordonnées $\lambda$ et $\mu$, pour chacune des valeurs de la variable $u$ qui forment les limites de ces intégrales, on reconnaîtra tout d'abord que les deux premières intégrales dans chaque ligne seront égales entre elles, car pour la première ligne, par exemple, elles seront respectivement

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{\lambda_0}^{-q}\frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{-q}^{\lambda_0}\frac{\lambda^2 d\lambda}{-\sqrt{\lambda(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}},$$

Digitized by Google

attendu que, lorsque $\lambda$ varie de $-q$ à $\lambda_0$, le signe du radical dans l'expression (122) de *du* n'est plus le même, avons-nous dit, pour ce second intervalle que pour le premier, dans lequel $\lambda$ variait de $\lambda_0$ à $-q$. Et comme ensuite chacun des groupes de deux intégrales qui suivent les deux premières, dans chaque ligne, reproduisent exactement les mêmes circonstances, il est clair que les $2m$ intégrales de la première ligne deviendront par cette transformation toutes égales entre elles, et semblablement toutes les $2n$ intégrales de la seconde ligne égales aussi entre elles. D'où il suit que l'expression précédente de T donnera, en opérant ainsi, et supprimant haut et bas le facteur 2, pour la durée de la période du mouvement, la valeur

$$T = \pm \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ m \int_{\lambda_0}^{-q} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}} - n \int_{\mu_0}^{-p} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{\mu(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}} \right],$$

résultat qui est bien, indépendant, comme nous l'avions annoncé du rang de l'accroissement U donné à la variable $u$, et qui concorde exactement d'ailleurs avec celui donné par M. Neumann, à propos des équations analogues rencontrées dans l'exemple précédent, en invoquant implicitement la théorie supposée connue des transcendantes hyperelliptiques. (*Journal de Crelle*, t. LVI, *loc. cit.*, § 10, p. 59.)

Comme dernière indication propre à renseigner sur la nature du mouvement, remarquons enfin que, d'après les formules de transformation (117$^{bis}$), la valeur limite $\lambda = -q$ donnant $y = 0$ quelle que soit la coordonnée $\mu$, pourvu qu'elle soit finie, ce qui est le cas, et de même la valeur limite $\mu = -p$ donnant semblablement $x = 0$, quelle que soit la valeur finie attribuée à la coordonnée $\lambda$, il résulte de la périodicité que nous avons reconnue séparément aux deux coordonnées $\lambda$ et $\mu$ par rapport à la variable $u$, qu'aux époques successives correspondant aux valeurs $u_1$, $3u_1$, $5u_1$, ... $(2m-1)u_1$ de cette variable, le point

Digitized by Google

mobile se retrouvera dans la section principale des $xz$, qui est par hypothèse celle qui correspond au plus petit paramètre, et de même qu'aux différentes époques correspondant aux valeurs $u_2$, $3u_2$, $5u_2$, ... $(2n-1)u_2$ de la même variable, il se trouvera dans la section principale des $yz$, c'est-à-dire celle dont le paramètre est le plus grand. Mais il importe de bien remarquer que la périodicité relative à la variable $u$ que nous constatons dans ces phénomènes, se produisant pour chaque coordonnée indépendamment de l'autre, n'engendrera pas comme conséquence une périodicité correspondante relativement au temps pour la succession de ces mêmes phénomènes, ou en termes plus précis qu'aucune indication ne permet de penser que dans chacune de ces deux séries, les différentes époques qui ramènent le même phénomène soient en réalité équidistantes, de même qu'aucun moyen élémentaire ne s'offre plus pour calculer effectivement par l'intégration la durée de leurs intervalles, sans passer par l'intermédiaire des transcendantes hyperelliptiques elles-mêmes. Le seul fait précis à retenir au sujet de cette dernière observation, et sur lequel nous voulions appeler l'attention, consiste donc en ce que, dans l'intervalle d'une période T, le point mobile se retrouvera $m$ fois dans la section principale des $xz$, et $n$ fois dans la section principale des $yz$.

2° Le paraboloïde donné étant toujours elliptique, si l'on suppose au contraire que la pesanteur s'exerce dans le sens même de l'axe des $z$, comme tous les raisonnements et les calculs, qui nous ont fourni nos équations intégrales (121), subsisteront encore dans ce cas à la seule condition d'y considérer la constante $g$ comme négative, ce qui obligera pour avoir des quantités réelles à multiplier par $\sqrt{-1}$ tous les termes de la seconde équation, ou à introduire le facteur $-1$ sous chacun des radicaux qui figurent dans ces deux équations, on voit, en reprenant le même mode de raisonnement que nous avons employé tout à l'heure, qu'il faudra pour la réalité des intégrales qui entrent dans ces formules, que les deux mêmes facteurs $\lambda_0 - \lambda$ et $\mu_0 - \mu$ soient au contraire positifs, c'est-à-dire que les deux coordonnées

Digitized by Google

$\lambda$ et $\mu$ seront astreintes à varier entre les limites $\lambda_0$ et $-\infty$ d'une part, et $\mu_0$ et $-q$ d'autre part; et l'on verrait exactement de même qu'elles parcourront d'une manière continue, toujours dans le même sens d'une limite à l'autre, chacun de ces intervalles. Le champ assigné de cette façon à la variation de la coordonnée $\lambda$ fait voir que dans tous les cas le point s'en ira à l'infini, car les formules de transformation (117$^{bis}$) et (118) donnent également $x=\infty$, $y=\infty$, $z=\infty$, pour $\lambda=-\infty$. Quant à la coordonnée $\mu$, elle sera comme tout à l'heure une fonction périodique de la variable $u$, définie par la seconde équation intégrale (122$^{bis}$) (ou plutôt par cette même équation multipliée par $\sqrt{-1}$, afin de n'avoir encore dans les deux membres que des quantités réelles), fonction dont la période relative à cette variable $u$ sera cette fois $2u_3$, en désignant de même par $u_3$ la quantité

$$u_3=\frac{1}{\sqrt{-2g}}\int_{\mu_0}^{-q}\frac{\mu d\mu}{\sqrt{-\mu(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}},$$

qui sera toujours finie de même que les quantités analogues $u_1$ et $u_2$, et pour la même raison. Mais il importe d'observer que, dans le cas actuel, on ne pourra plus affirmer comme tout à l'heure que cette même variable $u$, bien que variant toujours dans le même sens, de même que $t$, prendra encore tous les états de grandeur absolue depuis zéro jusqu'à l'infini, attendu que dans l'équation (121$^{ter}$) la première intégrale, dont l'élément $\lambda du$ peut alors devenir infini, pourra être infinie elle-même avec une limite supérieure finie. Désignant alors par $u=U_1$ la limite, quelle qu'elle soit, finie ou infinie, vers laquelle tendra $u$ pour $t=\infty$ (valeur dont le calcul exact exigerait l'intégration effective figurée par l'équation (121$^{ter}$), en supposant qu'on y ait remis sous les deux signes $\int$, à la place de $\lambda$ et $\mu$, les fonctions hyperelliptiques qui expriment leurs valeurs en $u$, d'après les deux équations (122$^{bis}$)); et si, de plus, on désigne par $(2m-1)$ le plus grand nombre entier impair compris dans la valeur numérique du rapport $\frac{U_1}{u_3}$, si ce rapport est plus grand que l'unité, ou $u_3<U_1$ en valeur absolue, la dernière équation ci-dessus, qui

Digitized by Google

définit la quantité $u_3$, signifiera que lorsque la variable $u$ aura acquis la valeur $u_3$, la coordonnée $\mu$ atteindra sa première limite $-q$, valeur pour laquelle on a, comme nous l'avons déjà dit, $y = 0$, quelle que soit la coordonnée $\lambda$, pourvu qu'elle soit finie (ce qui est toujours le cas, puisque la valeur $\lambda = -\infty$, donnant $x = \infty$, $y = \infty$, $z = \infty$, ne peut évidemment être atteinte qu'au bout d'un temps infini); et l'on verra dès lors, étant donnée la périodicité de la fonction $\mu$, que cette circonstance se reproduira certainement aux différentes époques correspondant aux valeurs $3u_3$, $5u_3$,... $(2m-1)u_3$ : ce qui revient à dire que, dans la durée indéfinie du mouvement, le point mobile se retrouvera encore $m$ fois dans la section principale des $xz$, qui est par hypothèse celle du plus petit paramètre. Mais ces dernières époques ne seront pas plus que tout à l'heure également distantes, ou, d'une façon plus générale, la périodicité de la seule coordonnée $\mu$ relativement à la variable $u$ n'entraînera pas comme conséquence, dans le cas actuel, une périodicité de la même coordonnée relativement au temps (ni encore bien moins une périodicité du mouvement lui-même), en raison de ce que dans la dernière équation (121$^{bis}$), qui par l'intégration fournirait encore l'expression de la durée de cette période, si elle existait réellement, la coordonnée $\lambda$ qui y figure n'est plus, ainsi que $\mu$, fonction périodique de $u$.

3° Supposons en dernier lieu que la surface donnée soit un paraboloïde hyperbolique; et ayant laissé pour ce cas, avons-nous dit plus haut, le sens de l'axe des $z$ arbitraire, convenons de prendre pour ce sens celui-même de la pesanteur, hypothèse qui revient à attribuer dans les raisonnements et les formules qui précèdent à la constante $g$ une valeur négative. Alors on reconnaîtra de suite que tous les calculs, qui nous ont conduits comme solution aux équations intégrales (121), subsisteront encore sous la seule condition d'y substituer partout la coordonnée $\nu$ à la coordonnée $\mu$, la surface donnée devant alors être considérée, ainsi que nous l'avons dit, comme appartenant à la seconde famille dont le paramètre est $\mu$, pour la valeur de ce paramètre

Digitized by Google

$\mu = 0$. Par conséquent dans ces deux équations (121), la première intégrale de chaque équation restera la même, sauf que $\nu_0$ y remplacera $\mu_0$, et pour les secondes intégrales les cinq facteurs sous le radical seront alors $\nu$, $p + \nu$, $q + \nu$, $\lambda_0 - \nu$, et $\nu_0 - \nu$.

Dès lors, les conditions de réalité restant les mêmes que pour le second cas en ce qui concerne le champ assigné à la variation de $\lambda$, et les inégalités de définition (117), dans lesquelles on aura fait $\mu = 0$, montrant alors que des cinq facteurs que nous venons de dire, les trois premiers sont toujours positifs, le quatrième toujours négatif, et le dernier seul susceptible *à priori* de prendre l'un ou l'autre signe, on voit en tenant compte de l'hypothèse $g < 0$, qu'il faudra pour la réalité que l'on ait constamment $\nu_0 - \nu > 0$, c'est-à-dire que $\nu$ sera astreint à varier entre $\nu_0$ comme limite supérieure et $-p$, comme limite inférieure, l'autre coordonnée $\lambda$ variant toujours comme précédemment dans l'hypothèse de $g < 0$, (cas 2°) entre les limites $\lambda_0$ et $-\infty$,

Dès lors, en partant de là, et raisonnnant exactement comme nous l'avons fait pour le paraboloïde elliptique à l'occasion du cas précédent, si l'on désigne par $u_4$ la quantité

$$u_4 = \frac{1}{\sqrt{-2g}} \int_{\nu_0}^{-p} \frac{\nu d\nu}{\sqrt{-\nu(p+\nu)(q+\nu)(\lambda_0-\nu)(\nu_0-\nu)}},$$

et, que $U_1$ étant encore comme tout à l'heure la limite finie ou infinie vers laquelle tend la variable $u$ pour $t = \infty$, on désigne par $(2n - 1)$ le plus grand nombre entier impair compris dans la valeur absolue du rapport $\frac{U_1}{u_4}$, le mobile s'en ira à l'infini dans la direction des $z$ positifs, et se retrouvera pendant la durée indéfinie du mouvement un nombre $n$ de fois dans la section principale des $yz$, c'est-à-dire précisément celle dont la concavité est tournée dans cette direction, ces passages successifs ayant lieu aux époques non équidistantes correspondant aux valeurs $u_4$, $3u_4$, $5u_4$, ... $(2n-1)u_4$, réalisées par la variable $u$ pendant cette durée.

Digitized by Google

Observons enfin, comme dernière remarque intéressante au sujet de la solution que nous avons obtenue, que la première de nos deux équations intégrales (121), étant complètement indépendante de la valeur absolue de la constante $g$, la trajectoire du mobile ne dépend en aucune façon de la grandeur de la force constante qui le sollicite, mais de son sens seulement, ainsi que nous l'avons vu par la discussion des trois cas successivement examinés; et de plus que pour différentes valeurs de même signe successivement attribuées à la constante $g$, la vitesse, en chaque point de cette trajectoire invariable variera simplement proportionnellement à $\sqrt{g}$, car si l'on pose un instant dans la seconde équation (121) $\sqrt{g}\,t = t'$, l'expression de la grandeur de la vitesse deviendra la suivante

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{g}\,\frac{ds}{\sqrt{g}\,dt} = \sqrt{g}\,\frac{1}{\left(\frac{dt'}{ds}\right)},$$

dans laquelle l'expression du second facteur sera alors complètement indépendante de la valeur de $g$.

Notons également en terminant que, si nous avions supposé, dans les données du problème que la vitesse initiale ne fût pas nulle, nous fussions arrivé à des résultats complètement analogues, seulement la discussion en eût été plus compliquée, et les constantes introduites par l'intégration moins simples à interpréter; et comme dans ce cas les équations intégrales obtenues eussent été exactement de même forme que les équations (103) que nous avons rencontrées dans le premier problème traité, relatif à l'ellipsoïde, on voit par là que le résultat d'une discussion semblable à celle que nous venons de faire, instituée au sujet de ces mêmes formules (103), nous eût conduits à des conclusions exactement semblables à celles que nous venons de formuler pour ce dernier problème, envisagé, bien entendu, exclusivement sous le premier cas, c'est-à-dire du *mouvement limité*, le second cas n'offrant évidemment aucune assimilation possible avec les conditions du mouvement d'un point réalisable sur un ellipsoïde.

Digitized by Google

## III

**Problème des lignes géodésiques. — Solution générale pour toute surface, susceptible de faire partie d'un système orthogonal triplement isotherme. — Lignes géodésiques des surfaces cylindriques, coniques, de révolution, et des surfaces du second ordre.**

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES LIGNES GÉODÉSIQUES. — CAS D'INTÉGRATION PAR QUADRATURE. — Parmi les différentes applications que l'on peut faire des formules que nous avons données dans le paragraphe précédent, la plus simple évidemment, et en même temps l'une des plus intéressantes, à raison de la signification géométrique des résultats, concerne le cas où l'on suppose nulle la force extérieure donnée, car alors, en vertu d'un théorème connu de la dynamique, le point matériel décrira une *ligne géodésique* de la surface sur laquelle il est astreint à rester, c'est-à-dire une de ces lignes dont le plan osculateur contient en chaque point la normale à la surface, et qui jouissent, comme conséquence de cette définition, de la propriété caractéristique d'être la plus courte qu'on puisse tracer entre deux points donnés sur la surface.

Étant donc donnée une surface quelconque, dont on propose de trouver les lignes géodésiques, l'équation différentielle de ces lignes ne sera autre chose que notre équation (53) ou (54) de la trajectoire du point matériel, dans laquelle on aura supposé nulles les composantes U, V, W, de la force extérieure donnée. Or, cette dernière hypothèse revenant à supposer constante la fonction des forces $F(x, y, z)$ ou $\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi)$, et par conséquent les quantités $H_1$ et $K_1$ définies par les équations (52) se réduisant alors simplement à H et K, multipliées par la même constante, les dérivées $\frac{lH_1}{\psi}$ et $\frac{lK_1}{\varphi}$ deviendront respectivement égales à $\frac{lH}{\psi}$ et $\frac{lK}{\varphi}$, et l'équation différentielle des lignes géodésiques de la surface proposée pourra s'écrire, d'après ce que nous avons vu dans le



Digitized by Google

paragraphe précédent, sous l'une ou l'autre des deux formes :

$$(123)\qquad u^2 d.v^2 - v^2 d.u^2 = (u^2 + v^2)\left(u^2 \frac{lH'}{\psi} d\psi - v^2 \frac{lK}{\varphi} d\varphi\right)$$

ou bien :

$$(124)\qquad \mathrm{H}d\varphi^2 . d(\mathrm{K}d\psi^2) - \mathrm{K}d\psi^2 . d(\mathrm{H}d\varphi^2) \qquad (*)$$
$$= (\mathrm{H}d\varphi^2 + \mathrm{K}d\psi^2)\left(\mathrm{H}d\psi^2 . \frac{lH}{\psi} d\psi - \mathrm{K}d\psi^2 . \frac{lK}{\varphi} d\varphi\right).$$

---

(*) Une semblable équation différentielle *ordinaire* du second ordre entre *deux* variables seulement, n'avait pas encore été donnée, croyons-nous, pour déterminer les lignes géodésiques d'une surface quelconque. On trouve bien à la vérité dans les *Vorlesungen* de Jacobi (22e leçon *in fine*, page 177) une équation destinée à cette fin, mais c'est une équation aux *dérivées partielles non linéaire*, dont il ne donne aucun exemple d'intégration. On trouve également pour cet objet, dans les *Disquisitiones generales* de Gauss, un système de *deux* équations ordinaires entre *trois* variables, savoir les deux coordonnées curvilignes $\varphi$ et $\psi$, et l'arc $s$ de la ligne géodésique, ou bien l'angle $\theta$ formé par cette ligne avec la courbe coordonnée $\varphi$, c'est-à-dire celle sur laquelle la coordonnée $\varphi$ varie seule, équations d'ailleurs dont il n'indique non plus aucun cas d'intégration. (*Disquisitiones, generales circa superficies curvas* § 18, Gauss *Wercke*, Band IV, p. 243). Nous croyons donc notre formule beaucoup plus avantageuse que celle de Gauss, pour la recherche des lignes géodésiques d'une surface donnée.

Mais, cette observation faite, il est bien facile de constater le parfait accord de notre formule (123) ou (124) avec celles de Gauss, que nous venons de dire, en la transformant de la façon suivante.

Écrivant ainsi cette formule, en la divisant par $u^2$,

$$u^2 \frac{u^2 d.v^2 - v^2 d.u^2}{(u^2)^2} = \left(1 + \frac{v^2}{u^2}\right)\left(u^2 \frac{lH}{\psi} d\psi - v^2 \frac{lK}{\varphi} d\varphi\right).$$

puis remarquant que l'on a évidemment, ainsi que nous le montrerons un peu plus loin,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{dn'}{dn} = \frac{vdt}{udt} = \frac{v}{u}, \qquad \text{d'où} \qquad u^2 \operatorname{tang}\theta = \mu v,$$

l'équation que nous venons d'écrire deviendra

$$u^2 d.\operatorname{tang}^2\theta = (1 + \operatorname{tang}^2\theta)\left(u^2 \frac{lH}{\psi} d\psi - v^2 \frac{lK}{\varphi} d\varphi\right),$$

ou

$$2u^2 \operatorname{tang}\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}\left(u^2 \frac{lH}{\psi} d\psi - v^2 \frac{lK}{\varphi} d\varphi\right),$$

Digitized by Google

La question étant devenue dès lors un problème purement géométrique, la détermination des deux constantes introduites par l'intégration de cette équation se fera à présent, en se donnant arbitrairement sur la surface les coordonnées des deux points $(\varphi_1, \psi_1)$ et $(\varphi_2, \psi_2)$, par lesquels on voudra faire passer la ligne géodésique, et entre lesquels elle figurera par conséquent la ligne la plus courte qu'il soit possible de tracer sur cette surface.

L'idée fondamentale de la méthode que nous venons d'indiquer, suivant en cela l'exemple de Jacobi relativement à l'ellipsoïde, pour la recherche des lignes géodésiques d'une surface donnée, consistant à déterminer la trajectoire d'un point matériel astreint à se mouvoir sur cette surface en vertu de sa seule vitesse initiale, et sans être soumis à l'action d'aucune force extérieure, paraîtra peut-être un peu détournée à quelques esprits, qui regretteront que, pour résoudre un problème purement géométrique, nous ne fassions pas appel également à des considérations d'ordre purement géométrique.

Il nous sera facile de donner satisfaction à ce regret et de nous mettre à l'abri de cette critique, en profitant, sans les modifier aucunement quant à la forme, des calculs que nous avons présentés dans le paragraphe précédent, mais en interprétant simplement d'une autre façon les variables et les divers éléments analytiques dont ils se composent. On n'a pas oublié, en effet, que les mêmes équations qui nous ont fourni les équations

---

ou encore, en tenant compte de la relation écrite deux lignes plus haut et réduisant :

$$2uv\,d\theta = u^2 \frac{\partial H}{\partial \psi} d\psi - v^2 \frac{\partial K}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Or si, multipliant cette dernière équation par $dt^2$, on y remplace ensuite $udt$ et $vdt$ par leurs valeurs respectives $\sqrt{H}\,d\varphi$ et $\sqrt{K}\,d\psi$, on obtient évidemment, en supprimant le facteur commun $d\varphi d\psi$,

$$2\sqrt{HK}\,d\theta = \frac{H}{\psi} d\varphi - \frac{K}{\varphi} d\psi,$$

ce qui est précisément la formule simple et élégante donnée par Gauss pour le cas des coordonnées orthogonales au § 19 de ses *Disquisitiones generales* (loc. cit. p. 244, *en haut*.)

Digitized by Google

différentielles du mouvement d'un point matériel en coordonnées curvilignes, nous ont également donné, par une autre interprétation des éléments analytiques qui y figurent, les formules relatives à la détermination du rayon de courbure d'une courbe quelconque, et cela en particulier pour le mouvement d'un point astreint à rester, ou pour le cas d'une courbe située, sur une surface absolument quelconque. Il nous suffira de nous reporter dans la question actuelle à cette seconde interprétation, pour parvenir à l'équation différentielle des lignes géodésiques, sans sortir un seul instant du terrain purement géométrique.

En effet, si l'on connaît un système triple orthogonal auquel on puisse rattacher la surface donnée, prenant toujours cette surface pour l'une des surfaces de la famille au paramètre $\varpi$, ou dans le cas contraire, prenant simplement sur la surface donnée deux coordonnées orthogonales $\varphi$ et $\psi$, proposons-nous de déterminer relativement à cette courbe les fonctions que nous avons appelées U, V, W, qui représentent en chaque point les composantes de la courbure. La définition même des lignes géodésiques, qui veut qu'en chaque point la normale principale ou le rayon de courbure de cette courbe coïncide avec la normale même de la surface, nous apprend que les deux composantes U et V sont constamment nulles, et que l'on a dès lors, en se reportant à leurs expressions (35), pour un point quelconque de la courbe, quelle que soit la surface donnée,

$$(125)\qquad \begin{cases} H\varphi'' + \left(\dfrac{H}{\varphi}\varphi' + \dfrac{H}{\psi}\psi'\right)\varphi' - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{H}{\varphi}\varphi'^2 + \dfrac{K}{\varphi}\psi'^2\right) = 0, \\ K\psi'' + \left(\dfrac{K}{\varphi}\varphi' + \dfrac{K}{\psi}\psi'\right)\psi' - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{H}{\psi}\varphi'^2 + \dfrac{K}{\psi}\psi'^2\right) = 0, \end{cases}$$

équations qui peuvent être dès lors considérées comme les équations différentielles de la courbe, exprimées à l'aide de la variable auxiliaire $s$. Or, ces équations ne diffèrent de celles (49) que nous avons eu à traiter dans le paragraphe précédent, à propos du mouvement d'un point sur une surface donnée, que par deux circonstances : 1° en ce que les composantes de la force

Digitized by Google

que nous avons appelées aussi U, V, W, et qui figurent dans celles-là, sont remplacées dans celles-ci par 0; et 2° en ce que les dérivées sont prises dans celles-ci par rapport à la variable *s*, au lieu de l'être par rapport à la variable *t*, ou, en d'autres termes, en ce que la différentielle *ds* y tient la place de la différentielle *dt*. Or si, au lieu d'effectuer ces deux modifications simultanément, pour passer du système (49) au système des deux équations précédentes, on les suppose effectuées successivement, il est clair que, quant à la première, le résultat de l'élimination de *dt* entre les équations (49), dans lesquelles on aurait fait préalablement U, V, W égales à zéro, s'obtiendra en introduisant simplement la même hypothèse dans le résultat antérieurement obtenu pour cette élimination, c'est-à-dire dans l'équation (53) ou (54), ce qui donnera précisément l'équation (123) ou (124) écrite tout à l'heure; et, pour ce qui est de la seconde modification, il est bien clair que le résultat de l'élimination que nous venons de dire restera exactement le même, que la différentielle à éliminer soit représentée par *ds* ou par *dt*. On s'assure donc ainsi que l'équation (124) est bien le résultat que l'on obtiendrait en éliminant, à l'aide des mêmes procédés analytiques employés dans le paragraphe précédent, la différentielle *ds* entre les deux équations (125), et nous nous trouvons ainsi ramenés au même résultat que tout à l'heure, à l'aide de considérations d'ordre exclusivement analytique ou géométrique, ainsi qu'on a l'habitude de le faire pour l'étude des courbes ou des surfaces.

Toutes les fois d'ailleurs que l'on sera parvenu à intégrer cette équation (123) ou (124), et que l'on en possédera une solution générale ou particulière $F(\varphi, \psi) = 0$, on pourra obtenir aisément, de la façon que nous avons expliquée pour une courbe quelconque, en premier lieu l'expression de l'arc *s* de la ligne géodésique représentée par cette équation, et, en partant de là, par l'application de nos formules (44) ou (29), la grandeur du rayon de courbure de cette même courbe en un point quelconque.

Le problème de la détermination des lignes géodésiques étant ainsi ramené tout entier à l'intégration de l'équation différentielle du second ordre (123) ou (124), nous n'aurons plus évidemment

Digitized by Google

qu'à invoquer pour cet objet les méthodes et les formules que nous avons données dans le paragraphe précédent, en nous souvenant seulement que, $H_1$ et $K_1$ se réduisent dans le cas actuel, comme nous l'avons dit, à H et K multipliées chacune par une constante arbitraire; et en observant en outre, à l'égard des solutions de double forme que nous avons rencontrées dans les cas II et III, que tandis que pour la trajectoire d'un point matériel soumis à l'action des forces données, par la nature même de la question, ces deux solutions n'étaient jamais admissibles *toutes les deux à la fois*, et que c'était tantôt l'une, tantôt l'autre, qu'il fallait adopter pour une période de temps déterminée, dans le cas actuel, au contraire, à raison du caractère simplement géométrique de la question, les deux solutions peuvent parfaitement être admises toutes les deux simultanément, attendu qu'elles satisfont également bien toutes les deux aux conditions imposées par le problème.

Sous le bénéfice de ces deux observations, nous récrirons ici en tableau les solutions et les hypothèses correspondantes, que nous fournissent, pour l'intégration de notre équation différentielle (124), les résultats formulés dans notre précédent chapitre.

I° Si H et K ont des expressions de la forme

$$H = \Phi(\varphi), \qquad K = \Psi(\psi), \tag{126}$$

on aura tout d'abord l'intégrale première

$$\frac{\sqrt{K}\,d\psi}{\sqrt{H}\,d\varphi} = C, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\sqrt{\Psi(\psi)}\,d\psi}{\sqrt{\Phi(\varphi)}\,d\varphi} = C, \tag{127}$$

puis enfin la solution unique

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int \sqrt{H}\,d\varphi - \frac{1}{C}\int \sqrt{K}\,d\psi = C', \\ \text{ou} \\ \displaystyle\int \sqrt{\Phi(\varphi)}\,d\varphi - \frac{1}{C}\int \sqrt{\Psi(\psi)}\,d\psi = C' \end{array}\right. \tag{128}$$

Digitized by Google

II° Dans ce cas la solution est double, et se présente sous deux formes distinctes, savoir :

1° Pour des expressions de H et de K, telles que

$$H = F(\varphi), \qquad K = \Phi(\varphi)\Psi(\psi), \tag{129}$$

on obtient d'abord l'intégrale première

$$1 + \frac{H d\varphi^2}{K d\psi^2} = C^2\Phi(\varphi), \tag{130}$$

puis la double solution

$$\begin{cases} \int \sqrt{\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{C^2\Phi(\varphi) - 1}} - \int \sqrt{\Psi(\psi)}\, d\psi = C', \\ \int \sqrt{\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{C^2\Phi(\varphi) - 1}} + \int \sqrt{\Psi(\psi)}\, d\psi = C''; \end{cases} \tag{131}$$

et 2°, pour des expressions de H et de K de la forme

$$H = \Phi(\varphi)\Psi(\psi), \qquad K = F(\psi), \tag{132}$$

on aura de même l'intégrale première

$$1 + \frac{K d\psi^2}{H d\varphi^2} = C^2\Psi(\psi), \tag{133}$$

puis la double solution

$$\begin{cases} \int \sqrt{\frac{F(\psi)}{\Psi(\psi)}} \frac{d\psi}{\sqrt{C^2\Psi(\psi) - 1}} - \int \sqrt{\Phi(\varphi)}\, d\varphi = C', \\ \int \sqrt{\frac{F(\psi)}{\Psi(\psi)}} \frac{d\psi}{\sqrt{C^2\Psi(\psi) - 1}} + \int \sqrt{\Phi(\varphi)}\, d\varphi = C''. \end{cases} \tag{134}$$

III° Enfin, si l'on suppose les quantités H et K de la forme

$$H = \Phi_2(\varphi)\left[\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)\right], \qquad K = \Psi_2(\psi)\left[\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)\right], \tag{135}$$

Digitized by Google

on aura encore la double solution

$$(136)\quad \begin{cases} \int\sqrt{\dfrac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C}}\,d\varphi - \int\sqrt{\dfrac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C}}\,d\psi = C', \\ \int\sqrt{\dfrac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C}}\,d\varphi + \int\sqrt{\dfrac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C}}\,d\psi = C''. \end{cases}$$

Bien que les hypothèses correspondant à ces trois cas paraissent au premier abord assez restreintes, elles se trouvent en fait réalisées dans toutes les surfaces que l'on a le plus souvent à considérer, et permettent, par conséquent, l'application de la méthode que nous venons d'indiquer dans presque tous les cas où la solution du problème offre le plus d'intérêt. Les conditions relatives au premier de ces trois cas, en effet, sont satisfaites par toutes les surfaces cylindriques, celles du second cas par toutes les surfaces coniques et toutes les surfaces de révolution, enfin celles relatives au troisième cas par toutes les surfaces susceptibles de faire partie d'un système orthogonal triplement isotherme.

Nous allons donc donner la solution du problème pour toutes ces différentes catégories de surfaces, en faisant l'application de notre méthode à tous les divers systèmes de coordonnées employés jusqu'à ce jour, lesquels ne se composent que de surfaces appartenant à l'une ou à l'autre de ces catégories, et nous aurons ainsi l'occasion de passer en revue, au point de vue des lignes géodésiques, à peu près toutes les surfaces dont il est fait le plus fréquemment usage, notamment la série complète des surfaces du second ordre. Nous rencontrerons ainsi, à la vérité, pas mal de résultats déjà très connus, tels que ceux qui concernent le plan, la sphère, le cylindre de révolution, etc.; nous ne croyons pas toutefois devoir omettre pour cela ces surfaces dans notre étude, en vue de conserver dans nos applications la gradation des difficultés et des complications analytiques que nous avons été amenés à observer dans notre théorie, gradation qui n'a rien de fortuit ni d'arbitraire, puisqu'elle correspond exactement, d'après ce que nous venons de dire, à une classification purement géométrique des surfaces, basée sur leur nature et

Digitized by Google

leurs caractères les plus essentiels. Nous rencontrerons ainsi d'ailleurs, chemin faisant, quelques propriétés intéressantes des lignes géodésiques, et notamment la plus importante de toutes, qui pourrait aussi bien servir à les définir, à savoir celle de la plus courte distance.

EXPRESSION DE LA LONGUEUR D'ARC ET DU RAYON DE COURBURE DE CES LIGNES. — Mais avant de commencer cette étude, nous voulons encore établir deux formules générales destinées à faire connaître, pour ces mêmes lignes, deux éléments intéressants à apprécier, et dont la détermination est liée par la théorie qui précède, d'une façon intime et toute naturelle, à celle de l'équation même de ces courbes.

En effet, dans chacun des différents cas que nous venons de passer en revue, on pourra toujours obtenir, en même temps que l'équation générale en termes finis des lignes géodésiques, l'expression de la longueur d'arc, et en déduire ensuite, comme nous l'avons expliqué, celle du rayon de courbure pour un point quelconque de cette même ligne. En vue d'abréger, nous effectuerons ce calcul pour le troisième cas seulement, dont les formules contiennent, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, dans ses hypothèses et dans ses résultats, celles relatives aux deux cas précédents à titre de cas particulier; et, une fois les résultats obtenus pour ce cas plus général, nous en déduirons sans peine ceux qui correspondent pour le même objet aux deux cas antérieurement examinés.

Pour cela il nous suffira de remarquer que si l'on convient de prendre $\Phi(\varphi) = \Phi_1(\varphi)$ et $\Psi(\psi) = \Psi_1(\psi)$ dans les hypothèses (76), les valeurs de H et K étant alors précisément celles (135) du cas III, on aura, d'autre part, $\mathcal{F} + C = 1$, en sorte que les forces extérieures étant nulles, la trajectoire du point mobile est bien alors une ligne géodésique de la surface donnée. Or, l'équation générale des forces vives (12) devenant dans la même hypothèse

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad ds = \pm\sqrt{2}dt,$$

Digitized by Google

d'où en intégrant

$$s = \pm\sqrt{2}(t + C''),$$

on voit par là que le second membre de la seconde équation (77) n'est autre chose que l'arc $s$ de la courbe, compté à partir d'une origine arbitraire. On a donc alors à la fois, pour représenter la ligne géodésique et exprimer la longueur de son arc, les deux équations (77), que nous récrirons ici avec cette interprétation, savoir :

$$(137)\quad \begin{cases} \int\sqrt{\dfrac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C_1}}\,d\varphi + \int\sqrt{\dfrac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C_1}}\,d\psi = C_1', \\ s = \int\sqrt{\dfrac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C_1}}\,\Phi_1(\varphi)\,d\varphi + \int\sqrt{\dfrac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C_1}}\,\Psi_1(\psi)\,d\psi. \end{cases} \quad (*)$$

Ce premier résultat acquis, pour en déduire l'expression du rayon de courbure au même point, nous différencierons simultanément ces deux équations par rapport à $s$, ce qui nous donnera

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C_1}}\,\varphi' + \sqrt{\dfrac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C_1}}\,\psi' = 0, \\ \Phi_1(\varphi)\sqrt{\dfrac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C_1}}\,\varphi' + \Psi_1(\psi)\sqrt{\dfrac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C_1}}\,\psi' = 1; \end{cases}$$

et en résolvant,

$$\sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C_1}}\,\varphi' = \frac{-1}{\Psi_1(\psi)-\Phi_1(\varphi)}, \qquad \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C_1}}\,\psi' = \frac{1}{\Psi_1(\psi)-\Phi_1(\varphi)},$$

(*) Si l'on ne voulait pas, de nouveau, faire appel à des considérations d'ordre mécanique, on arriverait aussi bien au même résultat en transformant l'équation (48) ou $ds^2 = Hd\varphi^2 + Kd\psi^2$, qui exprime dans tous les cas l'élément d'arc, exactement par le même procédé que nous avons employé à l'égard de l'équation des forces vives (74) dans les pages 56 et 57, pour en tirer la seconde équation (77). Nous ne recommencerons pas ce calcul, qui n'offrirait absolument rien de nouveau.

Digitized by Google

d'où nous tirerons

$$\left\{\begin{aligned}\varphi' &= \frac{1}{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)}\sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi) + C_1}{\Phi_2(\varphi)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Phi_2(\varphi)\left[\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)\right]}}\sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi) + C_1}{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)}},\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}\psi' &= \frac{1}{\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)}\sqrt{\frac{\Psi_1(\psi) + C_1}{\Psi_2(\psi)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Psi_2(\psi)\left[\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)\right]}}\sqrt{\frac{\Psi_1(\psi) + C_1}{\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)}},\end{aligned}\right.$$

valeurs que nous écrirons plus simplement, eu égard aux hypothèses (135) :

$$\varphi' = H^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi) + C_1}{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)}}, \qquad \psi' = K^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\Psi_1(\psi) + C_1}{\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)}}.$$

Si nous substituons alors ces deux dernières valeurs, soit en général dans notre formule (44), soit dans la troisième formule (29) si l'on suppose la surface donnée rattachée à un système triple orthogonal pour une valeur constante du paramètre $\varpi$, on aura, pour déterminer la grandeur du rayon de courbure demandé, l'une ou l'autre des deux formules simples qui concordent exactement, ainsi que cela devait être *à priori*, avec nos formules (80ter) (*),

$$(138)\qquad W = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)}\left[\frac{1}{R'}\left(\Phi_1(\varphi) + C_1\right) - \frac{1}{R''}\left(\Psi_1(\psi) + C_1\right)\right],$$

$$(139)\qquad W = \frac{1}{\rho} = -\frac{1}{2}\frac{J^{-\frac{1}{2}}}{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)}\left[\frac{lH}{\varpi}\left(\Phi_1(\varphi) + C_1\right) - \frac{lK}{\varpi}\left(\Psi_1(\psi) + C_1\right)\right],$$

(*) On s'assure aussi aisément que les valeurs des deux premières composantes U et V de la courbure fournies par nos équations (80bis) sont bien également nulles, comme

Digitized by Google

cette seconde formule n'étant autre que la première, dans laquelle on a remis à la place de R' et R'' leurs valeurs $R''_1$ et $R''_2$, données par les formules (31) dans le cas du système orthogonal.

Ces formules (137) et (139) étant ainsi établies pour le cas III, on obtiendra sans peine celles relatives au cas II, en remarquant que :

*Pour le sous-cas 1°* les hypothèses (129) qui le caractérisent se confondent avec les hypothèses (135) du cas III, en prenant

$$\Phi_1(\varphi) = \Phi(\varphi), \qquad \Psi_1(\psi) = 0, \qquad \Phi_2(\varphi) = \frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}, \qquad \Psi_2(\psi) = -\Psi(\psi),$$

et la première équation (137) se réduit également à la seconde équation (131) en y faisant les mêmes changements et, de plus, $C_1 = -\frac{1}{C^2}$ et $C'_1 = CC''$. On aura donc les expressions de $s$ et de $\rho$, qui correspondent à la ligne géodésique représentée par cette dernière équation (131), en faisant les mêmes changements dans les formules (137) et (139), ce qui donne pour ce sous-cas 1°

$$H = \Phi(\varphi), \qquad K = \Phi(\varphi)\Psi(\psi),$$

$$(140)\quad \begin{cases} s = \displaystyle\int \sqrt{\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}}\,\frac{\Phi(\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi)-\frac{1}{C^2}}} = C\int \sqrt{\frac{F(\varphi)\Phi(\varphi)}{C^2\Phi(\varphi)-1}}\,d\varphi, \\ \dfrac{1}{\rho} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{J^{-\frac{1}{2}}}{\Phi(\varphi)}\left[\dfrac{lH}{\varpi}\left(\Phi(\varphi)-\dfrac{1}{C^2}\right) - \dfrac{lK}{\varpi}\left(-\dfrac{1}{C^2}\right)\right] \\ \qquad = \dfrac{-1}{2C^2}\dfrac{\Delta_1\varpi}{\Phi(\varphi)}\left[\dfrac{lH}{\varpi}\left(C^2\Phi(\varphi)-1\right) + \dfrac{lK}{\varpi}\right]. \end{cases}$$

---

cela doit être dans le cas actuel, car les hypothèses (135) donnent alors immédiatement

$$lH = l\Phi_2(\varphi) + l\left[\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)\right], \qquad lK = l\Psi_2(\psi) + l\left[\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)\right],$$

d'où

$$\frac{lH}{\psi} = \frac{\Psi'_1(\psi)}{\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)}, \qquad \frac{lK}{\varphi} = \frac{\Phi'_1(\varphi)}{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)},$$

et par suite

$$\Psi'_1 + (\Phi_1 - \Psi_1)\frac{lH}{\psi} = 0, \qquad \Phi'_1 + (\Psi_1 - \Phi_1)\frac{lK}{\varphi} = 0,$$

Digitized by Google

De même, *pour le sous-cas* 2°, les formules (132) et (134) coïncident avec les hypothèses (135) et la première (137), en faisant

$$\Phi_1(\varphi) = 0, \qquad \Psi_1(\psi) = \Psi(\psi), \qquad \Phi_2(\varphi) = -\Phi(\varphi), \qquad \Psi_2(\psi) = \frac{F(\psi)}{\Psi(\psi)},$$

$$C_1 = -\frac{1}{C^2}, \qquad C_1' = CC'';$$

on aura donc, en effectuant les mêmes changements dans l'autre formule (137) et dans (139), pour la ligne géodésique représentée dans ce cas par la seconde équation (134) :

$$H = \Phi(\varphi)\Psi(\psi), \qquad K = F(\psi),$$

$$(141)\quad \begin{cases} s = C\int \sqrt{\dfrac{F(\psi)}{\Psi(\psi)}}\,\dfrac{\Psi(\psi)\,d\psi}{\sqrt{C^2\Psi(\psi) - 1}} = C\int \sqrt{\dfrac{F(\psi)\Psi(\psi)}{C^2\Psi(\psi) - 1}}\,d\psi, \\ \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{-1}{2C^2}\,\dfrac{\Delta_1\varpi}{\Psi(\psi)}\left[\dfrac{lH}{\varpi} + \dfrac{lK}{\varpi}\left(C^2\Psi(\psi) - 1\right)\right]. \end{cases}$$

On obtiendrait par une transformation semblable les formules analogues relatives au cas I, mais elles sont sans intérêt, les expressions de $s$ et de $\rho$ se déduisant immédiatement, pour les surfaces cylindriques qui correspondent seules à ce cas, des propriétés géométriques que nous serons amenés à reconnaître aux lignes géodésiques de ces surfaces.

Application aux surfaces cylindriques. — I° *Système des coordonnées planes ou rectilignes.* (*Plans.*) — Si l'on se propose de déterminer par la méthode que nous venons d'indiquer les lignes géodésiques de la surface $\varpi = \text{const.}$, il faudra faire dans l'équation (123) $\varphi = x$, $\psi = y$, $\varpi = z = \text{const.}$ Avec ces valeurs ayant $\Delta_1^2\varphi = 1$, $\Delta_1^2\psi = 1$, et par conséquent aussi $H = \Delta_1^{-2}\varphi = 1$, $K = \Delta_1^{-2}\psi = 1$, on aura par suite à la fois $\frac{lH}{\psi} = 0$, et $\frac{lK}{\varphi} = 0$, c'est-à-dire précisément les hypothèses (126) du cas I. L'intégrale sera donc donnée par l'équation (128), qui devient, dans le cas actuel, $\varphi - \frac{1}{C}\psi = C'$, ou, en remettant à la place de $\varphi$ et $\psi$ leurs valeurs, $y = C(x - C')$, ce qui donne

Digitized by Google

bien, comme cela devait être, une droite quelconque tracée dans le plan considéré.

II° *Système des coordonnées cylindriques du second ordre, ou semi-polaires. (Cylindres de révolution.)* — Le système des coordonnées cylindriques usuelles, défini par les formules de transformation

$$(142) \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z,$$

équations que l'on peut écrire inversement sous la forme

$$(143) \qquad x^2 + y^2 = r^2, \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\theta = \varphi, \qquad z = z = \psi,$$

se compose donc de deux familles de plans aux paramètres $\varphi$ et $\psi$ et d'une famille de cylindres de révolution au paramètre $r$. Ayant résolu la question pour les deux familles de plans par l'exemple précédent, il nous reste donc simplement, pour traiter ce système de coordonnées, à nous occuper de la famille de cylindres circulaires.

Pour trouver donc les lignes géodésiques d'un cylindre droit de rayon $r$, ayant par les valeurs de définition (143), d'une part,

$$\frac{d\psi}{dx} = 0, \qquad \frac{d\psi}{dy} = 0, \qquad \frac{d\psi}{dz} = 0, \qquad \Delta_1^2\psi = 1,$$

et, d'autre part,

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{y}{x^2}, \qquad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

$$\Delta_1^2\varphi = \left(-\frac{y}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right],$$

expression qu'on peut écrire, en ayant égard aux équations (142) et (143),

$$\Delta_1^2\varphi = \frac{1}{r^2\cos^2\theta}(1 + \operatorname{tang}^2\theta) = \frac{1}{r^2}(1 + \operatorname{tang}^2\theta)^2 = \frac{1}{r^2}(1 + \varphi^2)^2,$$

Digitized by Google

on en conclura les valeurs

$$H = \Delta_1^{-2}\varphi = \frac{r^2}{(1+\varphi^2)^2}, \qquad K = \Delta_1^{-2}\psi = 1,$$

qui vérifient encore les conditions $\frac{lH}{\psi} = 0$, et $\frac{lK}{\varphi} = 0$ : on se trouvera donc de nouveau dans l'hypothèse du cas I. L'intégrale sera donc encore fournie par la première équation (128), qui devient avec les valeurs de H et de K qui précèdent

$$r\int \frac{d\varphi}{1+\varphi^2} - \frac{1}{C}\psi = C' \qquad \text{ou} \qquad \psi = C(r \operatorname{arc\,tg}\varphi - C'),$$

ou, en remplaçant $\varphi$ et $\psi$ par leurs valeurs de définition (143),

$$z = C(r\theta - C'),$$

équation d'une hélice ordinaire tracée sur le cylindre donné.

III° *Système des coordonnées cylindriques en général.* (*Surfaces cylindriques quelconques.*) — Pour trouver les lignes géodésiques d'un cylindre dont l'équation serait en coordonnées planes $y = f(z)$, nous commencerons par déterminer les trajectoires orthogonales de la section droite, pour lesquelles on obtient immédiatement l'équation $y = -\int \frac{dz}{f'(z)} + C$, puis nous formerons dès lors le système coordonné

$$(144) \qquad x = \varphi, \qquad y + \int \frac{dz}{f'(z)} = \psi, \qquad y - f(z) = \varpi,$$

composé de deux familles de cylindres orthogonaux, dont l'une comprend le cylindre donné pour la valeur du paramètre $\varpi = 0$, et d'une famille de plans perpendiculaires aux génératrices des deux cylindres.

Cela posé, ayant par les équations de définition ci-dessus

$$(144^{bis}) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{dx}=1, & \frac{d\varphi}{dy}=0, & \frac{d\varphi}{dz}=0, & \Delta_1^2\varphi=1, & H=\Delta_1^{-2}\varphi=1, \\ \frac{d\psi}{dx}=0, & \frac{d\psi}{dy}=1, & \frac{d\psi}{dz}=\frac{1}{f'(z)}, & \Delta_1^2\psi=1+\frac{1}{f'(z)^2}, & K=\Delta_1^{-2}\psi=\frac{f'(z)^2}{1+f'(z)^2}, \end{cases}$$

Digitized by Google

il faudra, pour suivre textuellement la méthode que nous avons exposée, exprimer cette dernière valeur de K en $\varphi$ et $\psi$, en remplaçant $z$ par sa valeur tirée des équations (144). Or, les deux dernières de ces équations donnant, en éliminant $y$,

$$(144^{ter}) \qquad f(z) + \int \frac{dz}{f'(z)} = \psi - \varpi,$$

c'est-à-dire, en résolvant par rapport à $z$, puis faisant ensuite $\varpi = 0$, une valeur telle que $z = \mathcal{F}(\psi)$, on voit, après substitution de cette valeur dans l'expression de K, que K sera lui-même une fonction de $\psi$ seule, que nous désignerons encore par $\Psi(\psi)$, et, par conséquent, les conditions du cas I sont bien de nouveau réalisées.

L'intégrale première (127) que nous avons dans ce cas exprime alors naturellement une propriété simple de la tangente à la ligne considérée; car ayant, en vertu de la formule ($40^{bis}$) de notre *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces*, déjà rappelée dans notre chapitre I, ou des formules (43) de ce même chapitre,

$$dn = \frac{d\varphi}{\Delta_1 \varphi} = \sqrt{\mathrm{H}}\, d\varphi, \qquad dn' = \frac{d\psi}{\Delta_1 \psi} = \sqrt{\mathrm{K}}\, d\psi,$$

cette intégrale première (127) n'est autre que $\frac{dn'}{dn} = \mathrm{C}$. Or, si l'on trace sur la surface donnée, par un point quelconque M de la ligne étudiée, à la fois, d'une part, l'arc d'intersection par la surface $\psi$, lequel est normal à la surface $\varphi$, et que nous marquerons sur la figure ci-contre de la lettre $\varphi$, pour rappeler que tout le long de cet arc la coordonnée $\varphi$ varie seule, d'autre part l'arc d'intersection avec la surface $\varphi$, normal à la surface $\psi$, et que nous marque-

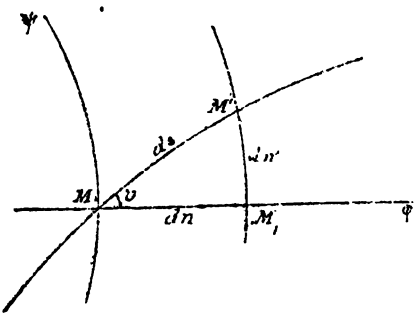



Fig. 2.

Digitized by Google

rons de la lettre $\psi$ pour une raison analogue, et enfin, en dernier lieu, la ligne géodésique elle-même, il est clair que dans le triangle infinitésimal $MM'M_1$ le rapport $\frac{dn'}{dn}$ représentera la tangente de l'angle $\upsilon$ sous lequel la ligne en question rencontre l'arc, $\varphi$ qui, dans l'exemple actuel, n'est autre que la génératrice commune aux deux cylindres, et par conséquent l'intégrale première (127) signifie simplement, dans ce cas, que la ligne géodésique coupe toutes les génératrices du cylindre donné sous un angle constant, dont la tangente est précisément la constante C.

L'intégrale définitive (128) sera dans ce cas, en remplaçant $\varphi$ par sa valeur $x$, et tenant compte de la valeur ci-dessus trouvée $H = 1$,

$$(145) \qquad x = \frac{1}{C}\int \sqrt{K}\,d\psi + C' \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{1}{C}\int \sqrt{\Psi(\psi)}\,d\psi + C',$$

ou, si l'on préfère revenir aux coordonnées rectilignes, en remplaçant K par sa valeur ($144^{bis}$), et $d\psi$ par sa valeur tirée de l'équation ($144^{ter}$), qui sera

$$d\psi = f'(z) + \frac{1}{f'(z)} = \frac{1 + f'(z)^2}{f'(z)},$$

cette autre équivalente

$$(145^{bis}) \qquad x = \frac{1}{C}\int \sqrt{1 + f'(z)^2}\,dz + C'.$$

Elle exprime dès lors cette autre propriété, qui n'est qu'une conséquence nécessaire et immédiate de la précédente, à savoir que l'ordonnée $x$ ou $\varphi$ est en chaque point de la courbe proportionnelle à l'arc $\int \sqrt{K}\,d\psi$ de la section droite du cylindre donné, car cette proportionnalité ayant lieu entre les éléments infiniment petits $dn$ et $dn'$, d'après la propriété précédente, subsiste nécessairement entre les grandeurs finies elles-mêmes. Ces deux propriétés font voir l'une et l'autre que si l'on développe sur un plan la surface du cylindre donné, la ligne géodésique se développera suivant une ligne droite, résultat qui établit directement pour ce cas la propriété de la plus courte distance, du moment



Digitized by Google

que le développement de la surface sur un plan n'altère en aucune façon la longueur des diverses lignes qu'on peut tracer sur cette surface. A cause de ces deux propriétés caractéristiques, on donne encore à cette courbe le nom d'*hélice*, par extension du cas où la surface est un cylindre de révolution.

Pour ce cas simple, les expressions de l'arc $s$, et du rayon de courbure $\rho$ de la ligne géodésique, résulteront immédiatement de ces deux propriétés géométriques combinées avec la formule générale d'Euler (42). En effet, ayant par la première de ces propriétés

$$\operatorname{tang} v = \frac{dn'}{dn} = C, \qquad \sin^2 v = \frac{C^2}{1+C^2}, \qquad \cos^2 v = \frac{1}{1+C^2},$$

et se rappelant que pour les cylindres les deux lignes de courbure sont la génératrice rectiligne, d'une part, et la section droite, d'autre part, auxquelles correspondent respectivement les courbures

$$\frac{1}{R'} = 0, \qquad \frac{1}{R''} = \frac{f''(z)}{\left[1+f'(z)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

on aura, en se reportant pour $s$ à l'équation de la ligne géodésique (145) ou (145$^{bis}$), puis pour $\rho$ à cette formule générale (42),

$$(145^{ter}) \quad \left\{ \begin{array}{l} s = \dfrac{x}{\cos v} = \sqrt{1+C^2}\left(C' + \dfrac{1}{C}\int \sqrt{\Psi(\psi)}\,d\psi\right) \\ \qquad = \sqrt{1+C^2}\left(C' + \dfrac{1}{C}\int \sqrt{1+f'(z)^2}\,dz\right), \\ \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{R''}\sin^2 v = \dfrac{C^2}{1+C^2}\dfrac{f''(z)}{\left[1+f'(z)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \end{array} \right.$$

les deux constantes arbitraires C et C′ étant déterminées, ainsi que nous l'avons expliqué, par la condition que la ligne géodésique précitée passe par deux points donnés arbitrairement sur la surface.

L'interprétation, que nous avons donnée de cette même équa-

Digitized by Google

tion (145), nous permettra de l'écrire immédiatement dans un grand nombre de cas particuliers, en profitant des formules connues relatives à la rectification des courbes. Ainsi, par exemple, pour ne citer que des surfaces du second ordre, s'il s'agit du cylindre parabolique $y^2 = 2pz$, cette équation sera :

$$x = \frac{1}{2Cp}\left[y\sqrt{p^2+y^2} + p^2\log\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right)\right] + C'.$$

S'il s'agit du cylindre elliptique $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, l'équation des lignes géodésiques s'écrira de même

$$x = \frac{a}{C}E\left(\arcsin\frac{z}{a}\right) + C' \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{a}{C}\left[\operatorname{Arg\,sin\,am}\frac{z}{a} - Z\left(\frac{z}{a}\right)\right] + C',$$

suivant que l'on adoptera les notations du *Traité des fonctions elliptiques* de Legendre, ou celles des *Fundamenta nova* de Jacobi, c'est-à-dire suivant que l'on posera

$$E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \qquad \text{avec} \qquad z = a\sin\varphi,$$

ou bien

$$\operatorname{Arg\,sin\,am}x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

et

$$Z(x) = \int_0^x \frac{k^2x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

et, de même, si la section droite du cylindre était une hyperbole, une lemniscate, une chaînette, une cycloïde, ou toute autre courbe dont on trouve l'expression de l'arc dans tous les traités d'analyse.

APPLICATION AUX SURFACES DE RÉVOLUTION. — IV° *Système des coordonnées sphériques, ou polaires. (Cônes de révolution, et*

Digitized by Google

*sphères.*) — Le système usuel des coordonnées polaires, défini par les formules de transformation

$$(146)\qquad x = r\sin\theta\cos\omega, \qquad y = r\sin\theta\sin\omega, \qquad z = r\cos\theta,$$

que l'on peut écrire inversement

$$(147)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \qquad \frac{x^2+y^2}{z^2} = \operatorname{tang}^2\theta, \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\omega,$$

se compose donc d'une famille de sphères concentriques de rayon $r$, d'une famille de cônes de révolution autour du même axe avec l'angle d'ouverture au sommet $2\theta$, et d'une famille de plans méridiens définis par l'azimut $\omega$. Nous avons, par conséquent, comme éléments nouveaux dans ce système, le cône de révolution, et la sphère.

1° *Cône.* — Pour résoudre la question relativement au cône, il suffira de faire, dans les équations ci-dessus (147), $r = \varphi$, et $\operatorname{tang}\omega = \psi$, en y considérant $\theta$ comme une constante. Ayant avec ces hypothèses, d'une part,

$$x = \varphi\frac{d\varphi}{dx}, \qquad y = \varphi\frac{d\varphi}{dy}, \qquad z = \varphi\frac{d\varphi}{dz},$$

d'où

$$\varphi^2 = \varphi^2\Delta_1^2\varphi, \qquad \Delta_1^2\varphi = 1,$$

et, d'autre part,

$$-\frac{y}{x^2} = \frac{d\psi}{dx}, \qquad \frac{1}{x} = \frac{d\psi}{dy}, \qquad 0 = \frac{d\psi}{dz},$$

d'où nous tirerons, comme pour le cylindre circulaire,

$$\Delta_1^2\psi = \frac{1}{x^2}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right] = \frac{1+\operatorname{tang}^2\omega}{r^2\sin^2\theta\cos^2\omega} = \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{(1+\operatorname{tang}^2\omega)^2}{r^2} = \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{(1+\psi^2)^2}{\varphi^2},$$

nous en conclurons immédiatement

$$H = \Delta_1^{-2}\varphi = 1, \qquad K = \Delta_1^{-2}\psi = \frac{\sin^2\theta}{(1+\psi^2)^2}\varphi^2,$$

Digitized by Google

valeurs qui vérifient, comme l'on voit, les hypothèses du cas II, puisqu'elles coïncident avec les expressions (129), en prenant

$$F(\varphi) = 1, \qquad \Phi(\varphi) = \varphi^2, \qquad \Psi(\psi) = \frac{\sin^2\theta}{(1+\psi^2)^2}.$$

La solution du problème consistera donc dans les deux équations (131), qui sont alors, par les valeurs qui précèdent,

$$\begin{cases} \int \frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{C^2\varphi^2 - 1}} - \sin\theta \int \frac{d\psi}{1+\psi^2} = C', \\ \int \frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{C^2\varphi^2 - 1}} + \sin\theta \int \frac{d\psi}{1+\psi^2} = C'', \end{cases}$$

ou, ce qui est la même chose, en effectuant les quadratures (*),

$$\arccos\frac{1}{C\varphi} - \sin\theta . \operatorname{arc\,tg}\psi = C', \qquad \arccos\frac{1}{C\varphi} + \sin\theta . \operatorname{arc\,tg}\psi = C''.$$

Or, il se trouve que, dans le cas actuel, ces deux solutions n'en forment en réalité qu'une seule, car si l'on écrit ainsi la première

$$\arccos\frac{1}{C\varphi} = \sin\theta . \operatorname{arc\,tg}\psi + C',$$

et qu'on prenne ensuite le cosinus des deux membres, en remplaçant $\varphi$ et $\psi$ par leurs valeurs de définition relatives au cas actuel, on obtient

$$\frac{1}{Cr} = \cos(\omega\sin\theta + C'), \tag{148}$$

---

(*) On trouve aisément, en effet,

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{C^2\varphi^2 - 1}} = \int \frac{d\varphi}{C\varphi^2\sqrt{1 - \frac{1}{C^2\varphi^2}}}$$

$$= \int \frac{-\left(-\frac{C d\varphi}{C^2\varphi^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{C\varphi}\right)^2}} = \arccos\frac{1}{C\varphi} + \text{const}$$

Digitized by Google

et l'on arriverait exactement à la même équation, en traitant de même la seconde équation, sauf que C′ y serait remplacé par $-C''$.

Si l'on détermine les constantes C et C′ par la condition que la ligne géodésique passe par deux points donnés sur le cône $(r_0, \omega_0)$ et $(r_1, \omega_1)$, on trouve sans peine pour la valeur de ces constantes, en représentant, pour abréger, $\sin\theta$ par $n$,

$$C = \frac{\sqrt{r_0^2 + r_1^2 - 2r_0 r_1 \sin n(\omega_0 - \omega_1)}}{r_0 r_1 \sin n(\omega_0 - \omega_1)}, \qquad \operatorname{tang} C' = \frac{r_0 \cos n\omega_0 - r_1 \cos n\omega_1}{r_0 \sin n\omega_0 - r_1 \sin n\omega_1},$$

ce qui permettra d'écrire l'équation (148) sous la forme symétrique

$$(149) \qquad \frac{1}{r}\sin n(\omega_1 - \omega_0) = \frac{1}{r_0}\sin n(\omega_1 - \omega) - \frac{1}{r_1}\sin n(\omega_0 - \omega).$$

Cette solution toutefois est soumise à un cas d'exception, savoir celui où l'un des points donnés est précisément le sommet du cône, car alors on voit que la valeur du coefficient C devient infinie. Mais, dans ce cas, la solution du problème est connue *à priori*, car la propriété même qui sert de définition à la ligne géodésique, à savoir que le plan osculateur contient en chaque point la normale à la surface, fait voir immédiatement que la génératrice qui passe par le second point donné satisfait à la question et, conséquemment, est précisément la ligne géodésique demandée. Il suit de là nécessairement, que si les deux points donnés sont situés chacun sur une nappe différente du cône, la ligne géodésique qui les joint, devant passer forcément par le sommet du cône, ne peut être autre chose que la juxtaposition bout à bout des deux génératrices déterminées par chacun d'eux, considérées chacune sur la nappe seule où se trouve le point correspondant.

Supposant donc que les deux points donnés appartiennent à la même nappe du cône, si l'on veut avoir la projection de la ligne géodésique sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône, il suffira évidemment de remplacer dans l'équation (148) ou (149)

Digitized by Google

$r$ par $\frac{\rho}{\sin\theta}$, en appelant $\rho$ le rayon vecteur de la projection, ce qui donnera pour l'équation de cette courbe en coordonnées polaires l'équation de même forme

$$\frac{1}{\rho}\sin n(\omega_1 - \omega_0) = \frac{1}{\rho_0}\sin n(\omega_1 - \omega) - \frac{1}{\rho_1}\sin n(\omega_0 - \omega).$$

Cette projection, de même que la courbe elle-même, se compose de deux branches infinies symétriques par rapport au plan, qui contient le rayon vecteur minimum, et dont l'azimut est évidemment, d'après la forme (148), $\omega = -\frac{C'}{\sin\theta}$, ces deux branches comportant elles-mêmes deux asymptotes, symétriques également par rapport à ce plan, et répondant aux azimuts obtenus en faisant

$$\omega\sin\theta + C' = \pm\frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad \omega = \frac{1}{\sin\theta}\left(\pm\frac{\pi}{2} - C'\right).$$

2° *Sphère.* — Pour appliquer la méthode au cas de la sphère, il faudra considérer $r$ comme constant dans les équations (147), et y faire $\operatorname{tang}\theta = \varphi$, et $\operatorname{tang}\omega = \psi$, hypothèses qui donneront alors en différentiant

$$\left\{\begin{array}{lll} \varphi\dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{x}{z^2}, & \varphi\dfrac{d\varphi}{dy} = \dfrac{y}{z^2}, & \varphi\dfrac{d\varphi}{dz} = -\dfrac{x^2+y^2}{z^3}, \\ \dfrac{d\psi}{dx} = -\dfrac{y}{x^2}, & \dfrac{d\psi}{dy} = \dfrac{1}{x}, & \dfrac{d\psi}{dz} = 0; \end{array}\right.$$

d'où l'on conclura, en élevant au carré et ajoutant,

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi^2\Delta_1^2\varphi = \left(\dfrac{x}{z^2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{z^2}\right)^2 + \left(\dfrac{x^2+y^2}{z^3}\right)^2 = \dfrac{1}{z^2}\left[\dfrac{x^2+y^2}{z^2} + \left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right)^2\right] = \dfrac{\varphi^2+\varphi^4}{r^2\cos^2\theta} = \dfrac{\varphi^2(1+\varphi^2)}{r^2\cdot\dfrac{1}{1+\varphi^2}}, \\ \Delta_1^2\psi = \left(-\dfrac{y}{x^2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2}\left[\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 1\right] = \dfrac{1+\operatorname{tg}^2\omega}{r^2\sin^2\theta\cos^2\omega} = \dfrac{1+\psi^2}{r^2\cdot\dfrac{\varphi^2}{1+\varphi^2}\dfrac{1}{1+\psi^2}}, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire définitivement

$$\Delta_1^2\varphi = \frac{1}{r^2}(1+\varphi^2)^2, \qquad \Delta_1^2\psi = \frac{1}{r^2\varphi^2}(1+\varphi^2)(1+\psi^2)^2,$$

Digitized by Google

et inversement

$$H = \Delta_1^{-2}\varphi = \frac{r^2}{(1+\varphi^2)^2}, \qquad K = \Delta_1^{-2}\psi = \frac{r^2\varphi^2}{1+\varphi^2}\frac{1}{(1+\psi^2)^2},$$

valeurs qui vérifient bien encore les hypothèses du cas II, attendu qu'elles se confondent avec les expressions (129), en faisant

$$F(\varphi) = \frac{r^2}{(1+\varphi^2)^2}, \qquad \Phi(\varphi) = \frac{r^2\varphi^2}{1+\varphi^2}, \qquad \Psi(\psi) = \frac{1}{(1+\psi^2)^2}.$$

Dès lors, ayant par ces valeurs

$$\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{[C^2\Phi(\varphi)-1]} = \frac{r^2}{(1+\varphi^2)^2}\frac{1+\varphi^2}{r^2\varphi^2}\frac{1}{\left(\frac{C^2r^2\varphi^2}{1+\varphi^2}-1\right)} = \frac{1}{\varphi^2[C^2r^2\varphi^2-(1+\varphi^2)]},$$

si nous écrivons comme constante $\frac{1+C^2}{r^2}$ à la place de $C^2$ dans l'expression qui précède, on voit que l'intégrale générale, qui consiste dans les deux solutions (131), sera encore, comme pour le cône, fournie par les deux équations

$$\int\frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{C^2\varphi^2-1}} - \int\frac{d\psi}{1+\psi^2} = C', \qquad \int\frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{C^2\varphi^2-1}} + \int\frac{d\psi}{1+\psi^2} = C'',$$

ou bien

$$\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{C\varphi} - \operatorname{arc\,tg}\psi = C', \qquad \operatorname{arc\,cos}\frac{1}{C\varphi} + \operatorname{arc\,tg}\psi = C'',$$

lesquelles ne donnent encore qu'une solution unique, en repassant des fonctions inverses aux fonctions circulaires, à savoir

$$\frac{1}{C\varphi} = \cos(\operatorname{arc\,tg}\psi + C'),$$

ou, en remplaçant enfin $\varphi$ et $\psi$ par leurs valeurs conventionnelles,

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\theta} = C\cos(\omega + C').$$

Digitized by Google

Pour reconnaître la nature de cette courbe, nous conviendrons de faire

$$C = \frac{1}{\operatorname{tang}\theta_0}, \qquad \text{et} \qquad C' = -\omega_0,$$

ce qui sera toujours possible, quelles que soient les valeurs des constantes arbitraires C et C', et l'équation précédente qui devient ainsi

$$\operatorname{tang}\theta\cos(\omega - \omega_0) = \operatorname{tang}\theta_0, \tag{150}$$

se confondant alors avec la formule connue *tang* a *cos* B = *tang* c des triangles sphériques rectangles, nous fait voir que la ligne en question n'est autre chose que le troisième côté d'un triangle sphérique rectangle, dont $\theta$ est l'hypoténuse et $\theta_0$ l'un des côtés de l'angle droit, l'angle compris étant $\omega - \omega_0$. Car si, ayant tracé sur la surface le cercle méridien $PM_0$ dont l'azimut est $\omega_0$, et marqué sur ce cercle le point $M_0$ $(\omega_0, \theta_0)$, nous menons par ce point un grand cercle perpendiculaire $M_0M$; si nous désignons, de plus, par $\theta$ et $\omega$ les coordonnées d'un point quelconque M de ce dernier grand cercle, nous aurons pour tous ces points, en vertu de la formule élémentaire que nous venons de rappeler, appliquée au triangle rectangle $PM_0M$, l'équation même (150) que nous venons de rencontrer pour la ligne géodésique demandée, et l'on retrouve bien ainsi, comme cela devait être, la propriété connue, dans la géométrie élémentaire, des arcs de grand cercle, d'être le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la sphère.

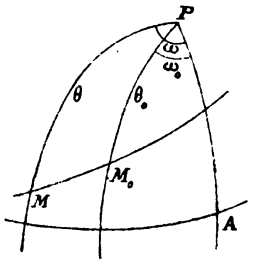


Fig. 3.

V° *Système des coordonnées sphéroïdales.* (*Surfaces de révolution en général.*) — Pour déterminer les lignes géodésiques d'une surface de révolution, définie par l'équation de sa méridienne en coordonnées rectilignes $r = f(z)$, nous considérerons

Digitized by Google

de même dans chaque plan méridien les trajectoires orthogonales de cette courbe, qui ont pour équation, d'après ce que nous avons déjà dit pour les cylindres $r = -\int \frac{dz}{f'(z)} + C$, et nous formerons dès lors le système coordonné suivant

$$(151)\qquad \frac{y}{x} = \varphi, \qquad \sqrt{x^2+y^2} + \int \frac{dz}{f'(z)} = \psi, \qquad \sqrt{x^2+y^2} - f(z) = \varpi,$$

composé d'une famille de plans méridiens, et de deux familles de surfaces de révolution autour du même axe, orthogonales entre elles, dont la seconde comprend la surface donnée pour la valeur particulière du paramètre $\varpi = 0$.

Les équations de définition qui précèdent conduisant aux valeurs

$$(152)\quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{y}{x^2}, & \frac{d\varphi}{dy} = \frac{1}{x}, & \frac{d\varphi}{dz} = 0, & \Delta_1^2\varphi = \left(\frac{y}{x^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right], \\ \frac{d\psi}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \frac{d\psi}{dy} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \frac{d\psi}{dz} = \frac{1}{f'(z)}, & \Delta_1^2\psi = 1 + \frac{1}{f'(z)^2} = \frac{1+f'(z)^2}{f'(z)^2}, \\ \frac{d\varpi}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \frac{d\varpi}{dy} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \frac{d\varpi}{dz} = -f'(z), & \Delta_1^2\varpi = 1 + f'(z)^2, \end{cases}$$

il faudra tout d'abord exprimer ces paramètres en fonction de $\varphi$ et de $\psi$. Pour cela l'élimination de $y$ entre les trois équations (151) donnant celles-ci

$$(153)\qquad x\sqrt{1+\varphi^2} = f(z) + \varpi, \qquad f(z) + \int \frac{dz}{f'(z)} = \psi - \varpi,$$

d'où nous tirerons

$$(154)\qquad x = \frac{f(z)+\varpi}{\sqrt{1+\varphi^2}}, \qquad z = \mathcal{F}(\psi - \varpi),$$

nous aurons, en substituant la première de ces deux valeurs dans l'expression (152) de $\Delta_1^2\varphi$,

$$\Delta_1^2\varphi = \frac{1}{\frac{[f(z)+\varpi]^2}{1+\varphi^2}}(1+\varphi^2) = \frac{(1+\varphi^2)^2}{[f(z)+\varpi]^2},$$

Digitized by Google

et nous conclurons ensuite de cette dernière valeur, et de celle analogue de $\Delta_1^2\psi$,

$$(155) \qquad H = \Delta_1^{-2}\varphi = \frac{[f(z) + \varpi]^2}{(1 + \varphi^2)^2}, \qquad K = \Delta_1^{-2}\psi = \frac{f'(z)^2}{1 + f'(z)^2};$$

et lorsque nous aurons remis dans ces expressions à la place de $z$ sa valeur (154), et que nous y aurons fait $\varpi = 0$, on voit que H et K prendront bien les formes (132), qui constituent l'une des hypothèses auxquelles se rapporte le cas II, la coïncidence des valeurs qui précèdent avec ces expressions (132) étant réalisée en prenant simplement

$$(156) \qquad \frac{f'(z)^2}{1 + f'(z)^2} = F(\psi), \qquad \frac{1}{(1 + \varphi^2)^2} = \Phi(\varphi), \qquad f(z)^2 = \Psi(\psi).$$

Avec ces valeurs l'intégrale première (133), qui est alors

$$(157) \qquad 1 + \frac{K d\psi^2}{H d\varphi^2} = C^2 f(z)^2,$$

exprimera encore une propriété simple de la tangente à la ligne géodésique étudiée, car si nous marquons pour chaque point sur la surface donnée, comme nous l'avons fait dans le cas des cylindres, ses intersections par les deux autres surfaces coordonnées, à savoir la courbe méridienne que nous marquerons de la lettre $\psi$ parce que la coordonnée $\psi$ seule varie sur cette courbe, et le parallèle que nous marquerons semblablement de la lettre $\varphi$, si, de plus, nous désignons par $\upsilon$ l'angle de la ligne géodésique avec cette dernière courbe, ayant encore comme précédemment

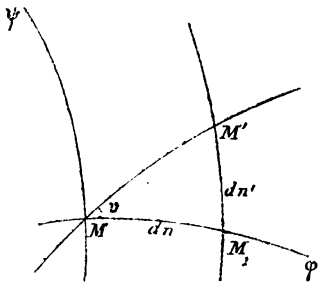



Fig. 4.

$$\frac{\sqrt{K}\, d\psi}{\sqrt{H}\, d\varphi} = \frac{dn'}{dn} = \operatorname{tang} \upsilon,$$

Digitized by Google

et tenant compte de la troisième équation (151), où il faut faire $\varpi = 0$, l'intégrale première ci-dessus (157) pourra s'écrire simplement

$$1 + \operatorname{tang}^2 v = C^2 r^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\cos^2 v} = C^2 r^2,$$

ou encore, en extrayant les racines et renversant le rapport,

$$\cos v = \frac{1}{Cr}, \tag{158}$$

c'est-à-dire que la ligne en question rencontre chaque parallèle sous un angle, dont le cosinus est inversement proportionnel au rayon même de ce parallèle, ou à la distance du point considéré à l'axe de révolution de la surface. Cette propriété simple, qui suffirait à définir les lignes géodésiques des surfaces de révolution (*), forme le pendant de celle que nous avons reconnue un peu plus haut aux lignes géodésiques des surfaces cylindriques, et que l'on adopte communément pour définition des hélices en général. Il est visible d'ailleurs qu'elles se confondent en une seule dans l'hélice ordinaire, alors que la surface sur laquelle elle est tracée appartient à la fois à la catégorie des cylindres, et à celle des surfaces de révolution.

Les expressions (156) conduiront de même sans difficulté, par le moyen des formules (134), aux intégrales définitives. Nous nous bornerons à ce sujet à faire une seule observation. La méthode qui précède suppose que l'on puisse former effectivement les fonctions F et Ψ, par la substitution dans les expressions (155) de H et K, de la valeur de $z$ (154), tirée de la seconde équation (153), et, par conséquent, que l'on puisse résoudre cette dernière équation. Dans le cas où cette résolution serait impossible, on pourra tourner la difficulté en gardant provisoire-

(*) Cette propriété est effectivement admise comme *définition* de la ligne géodésique d'un *sphéroïde* par GUDERMANN dans le mémoire intitulé : *Fundamenta trigonometriae spheroïdicae exacta*, § 7, p. 300. (*Journal de Crelle*, t. XLIII (1852), p. 294.)

Digitized by Google

ment $z$ à titre de variable auxiliaire, et ayant alors, en différentiant cette même équation (153),

$$d\psi = \left(f'(z) + \frac{1}{f'(z)}\right)dz = \frac{1 + f'(z)^2}{f'(z)}\,dz$$

et, par suite, en ayant égard aux valeurs (156),

$$(159)\quad \left\{\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{F(\psi)}{\Psi(\psi)}}\dfrac{d\psi}{\sqrt{C^2\Psi(\psi)-1}} = \sqrt{\dfrac{f'(z)^2}{f(z)^2[1+f'(z)^2]}}\dfrac{1}{\sqrt{C^2f(z)^2-1}}\dfrac{1+f'(z)^2}{f'(z)}dz \\ \qquad\qquad = \sqrt{\dfrac{1+f'(z)^2}{C^2f(z)^2-1}}\dfrac{dz}{f(z)}, \\ \sqrt{\Phi(\varphi)}\,d\varphi = \dfrac{d\varphi}{1+\varphi^2} = d(\text{arc tang}\,\varphi), \end{array}\right.$$

l'intégrale définitive (134) deviendra avec ce changement de variable

$$(160)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int\sqrt{\frac{1+f'(z)^2}{C^2f(z)^2-1}}\frac{dz}{f(z)} - \text{arc tang}\,\varphi = C', \\ \displaystyle\int\sqrt{\frac{1+f'(z)^2}{C^2f(z)^2-1}}\frac{dz}{f(z)} + \text{arc tang}\,\varphi = C''. \end{array}\right.$$

Dès lors, les quadratures indiquées dans ces équations étant supposées effectuées, on pourra, ou bien considérer ces équations comme exprimant, à l'aide de la variable auxiliaire $z$ définie par la seconde équation (153), la relation cherchée tout d'abord entre les coordonnées curvilignes $\varphi$ et $\psi$, ou, ce qui est plus simple, obtenir immédiatement l'équation de la ligne géodésique en coordonnées rectilignes, en remettant dans les équations qui précèdent à la place de $\varphi$ sa valeur $\frac{y}{x}$, et l'on retombe ainsi sur le résultat que l'on eût obtenu en traitant de prime abord le problème à l'aide des équations classiques, qui ont rapport à ce mode habituel de coordonnées.

Digitized by Google

A titre de vérification des formules que nous avons données pour calculer $s$ et $\rho$, avant de les employer utilement pour en tirer dans d'autres cas plus compliqués des résultats nouveaux, proposons-nous d'en déduire actuellement pour ce cas simple les expressions de l'arc et du rayon de courbure de la ligne géodésique représentée par la seconde équation (160).

Pour l'expression de $s$, en tenant compte de la valeur (156) de $\Psi(\psi)$, et profitant de la valeur de la différentielle déjà calculée par la première équation (159), la première (141) nous donnera de suite

$$s = C\int \sqrt{\frac{1 + f'(z)^2}{C^2 f(z)^2 - 1}}\, f(z)\, dz.$$

Pour avoir de même la seconde, il nous faudra tout d'abord tirer des formules (155) l'expression des dérivées $\frac{lH}{\varpi}$ et $\frac{lK}{\varpi}$, en y considérant $z$ comme une fonction de $\varpi$ définie par la seconde équation (153), hypothèse qui nous donnera par la différentiation

$$\left[f'(z) + \frac{1}{f'(z)}\right]\frac{dz}{d\varpi} = -1, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dz}{d\varpi} = \frac{-f'(z)}{1 + f'(z)^2}.$$

Or, ayant par les valeurs (155)

$$lH = -l(1 + \varphi^2)^2 + 2l\Big(f(z) + \varpi\Big), \qquad lK = 2lf'(z) - l\Big(1 + f'(z)^2\Big),$$

nous en déduirons ainsi

$$\frac{lH}{\varpi} = \frac{\partial lH}{\partial \varpi} + \frac{\partial lH}{\partial z}\frac{dz}{d\varpi} = \frac{2}{f(z) + \varpi}\left[1 + f'(z)\frac{dz}{d\varpi}\right] = \frac{2}{f(z) + \varpi}\left[1 - \frac{f'(z)^2}{1 + f'(z)^2}\right],$$

$$\frac{lK}{\varpi} = \frac{\partial lK}{\partial z}\frac{dz}{d\varpi} = \left[\frac{2f''(z)}{f'(z)} - \frac{2f'(z)f''(z)}{1 + f'(z)^2}\right]\frac{-f'(z)}{1 + f'(z)^2} = \frac{-2f''(z)}{1 + f'(z)^2}\left[1 - \frac{f'(z)^2}{1 + f'(z)^2}\right],$$

c'est-à-dire simplement en réduisant

$$\frac{lH}{\varpi} = \frac{2}{[f(z) + \varpi][1 + f'(z)^2]}, \qquad \frac{lK}{\varpi} = \frac{-2f''(z)}{[1 + f'(z)^2]^2}.$$

Digitized by Google

Puis prenant les valeurs de ces dérivées pour la surface donnée, c'est-à-dire y faisant $\varpi = 0$, et les reportant ensuite, en même temps que la valeur (152) de $\Delta_1 \varpi$, et la valeur (156) de $\Psi(\psi)$ dans la seconde formule (141), nous aurons définitivement

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{2C^2}\frac{\sqrt{1+f'(z)^2}}{f(z)^2}\left[\frac{2}{f(z)[1+f'(z)^2]} - \frac{2f''(z)}{[1+f'(z)^2]^2}\left(C^2 f(z)^2 - 1\right)\right],$$

valeur que nous pouvons écrire encore

$$(161) \qquad -\frac{1}{\rho} = \frac{1}{f(z)\sqrt{1+f'(z)^2}}\frac{1}{C^2 f(z)^2} + \frac{f''(z)}{\left[1+f'(z)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(1 - \frac{1}{C^2 f(z)^2}\right).$$

Or, nous eussions pu aisément, dans le cas actuel, écrire ces deux mêmes expressions de $s$ et de $\rho$ sans le secours de nos formules (141), et en faisant usage simplement de la propriété géométrique (158), de la formule générale d'Euler (42), et du théorème de Meunier. Car la première donnant, en remplaçant $r$ par sa valeur $f(z)$,

$$(162) \qquad \cos^2 v = \frac{1}{C^2 f(z)^2}, \qquad \sin^2 v = 1 - \frac{1}{C^2 f(z)^2},$$

on a évidemment, d'une part, entre l'élément d'arc $dn'$ de la méridienne et l'élément $ds$ de la ligne géodésique, en considérant le second comme projection du premier (voir fig. 4, p. 143)

$$dn' = ds \sin v, \qquad \text{ou} \qquad dz\sqrt{1+f'(z)^2} = ds\sqrt{1 - \frac{1}{C^2 f(z)^2}},$$

d'où

$$ds = \frac{\sqrt{1+f'(z)^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{C^2 f(z)^2}}}\,dz, \qquad \text{et} \qquad s = C\int \sqrt{\frac{1+f'(z)^2}{C^2 f(z)^2 - 1}}\, f(z)\,dz.$$

Digitized by Google

Et, d'autre part, entre le rayon $MI = r$ du parallèle, et le rayon de courbure $MK = R'$ de la section normale de la surface qui a la même tangente (par suite, perpendiculaire également au plan méridien supposé pris pour plan de la figure), le théorème de Meunier donne la relation

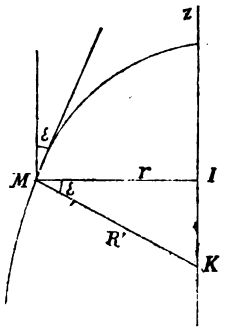


Fig. 5.

$$MI = MK\cos\varepsilon, \qquad \text{ou} \qquad r = R'\cos\varepsilon,$$

$\varepsilon$ étant l'angle formé par la normale MK à la méridienne $r = f(z)$ avec la direction des ordonnées $r$, ou, ce qui est la même chose, l'angle de la tangente avec l'axe des abcisses $z$, angle pour lequel on a dès lors

$$\text{tang}\,\varepsilon = f'(z), \qquad \cos\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(z)^2}},$$

et, par suite, en substituant dans la relation précédente,

$$r = R'\frac{1}{\sqrt{1 + f'(z)^2}}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{R'} = \frac{1}{f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2}}.$$

En remettant donc cette dernière expression à la place de $\frac{1}{R'}$, et pour $\frac{1}{R''}$ celle de la courbure de la méridienne, ainsi que les valeurs (162) de $\sin^2 v$ et $\cos^2 v$, dans la formule générale précitée (42), on retrouve bien exactement l'expression (161), à laquelle nous ont conduits nos formules (141), et que nous proposions ainsi de vérifier.

Application aux surfaces coniques; exemples. — Dans les différents cas que nous venons de traiter, la solution du problème pouvait être obtenue assez simplement, à la vérité, en partant des équations classiques que nous avons déjà rappelées, parce que dans chacun de ces cas l'équation de la surface donnée pouvant s'exprimer à l'aide de deux variables seulement, les équations

Digitized by Google

différentielles en question se réduisent elles-mêmes aisément à une seule équation du second ordre entre deux variables, dont on aperçoit ensuite, avec tant soit peu de dextérité, l'intégrale générale, soit pour le cas des cylindres, soit pour le cas des surfaces de révolution.

Il n'en est pas de même dans les deux cas que nous allons traiter maintenant. Pour celui des surfaces coniques, il est vrai, l'équation de la surface donnée, et, par suite, l'équation différentielle adjointe en coordonnées rectilignes, peuvent être encore assez facilement ramenées à ne contenir que deux variables seulement, mais la forme de cette équation du second ordre, quelle que soit la variable indépendante que l'on adopte, est compliquée, et aucune indication d'ordre purement analytique ne s'offre à l'esprit pour mettre sur la voie de son intégration. La propriété géométrique de la plus courte distance, qui exige que dans le développement de la surface sur un plan la ligne géodésique se développe suivant une ligne droite, peut seule donner quelque indication sur la nature de la courbe, et permettre d'arriver, comme nous l'indiquerons, à son équation.

Quant aux surfaces du second ordre non développables, telles que l'ellipsoïde et les hyperboloïdes, pour lesquelles ce procédé détourné fait défaut, le problème a paru pendant longtemps l'un des plus difficiles de l'analyse appliquée à la théorie des surfaces. Aussi la solution simple et élégante, qui en a été donnée pour la première fois dans les *Vorlesungen über Dynamick*, à l'aide des coordonnées elliptiques, et comme application d'une nouvelle méthode pour l'intégration des équations de la dynamique, a-t-elle excité l'admiration des géomètres, qui ont été unanimes à reconnaître dans cette belle découverte de Jacobi une manifestation nouvelle de son puissant génie. On peut donc regarder comme avéré, que l'instrument habituel des coordonnées rectilignes, ou même ceux des autres coordonnées classiques, polaires ou semi-polaires, étaient radicalement impuissants pour résoudre seuls ce difficile problème.

Nous allons voir que la méthode que nous avons exposée fournit la solution de ces diverses questions, de même que pour



Digitized by Google

les cas précédents, par un procédé simple et uniforme, le calcul restant toujours le même, quant à sa marche et à son esprit, et se bornant en réalité à l'application d'une formule unique, en tenant compte de la forme particulière des fonctions données dans la question.

VI° *Système des coordonnées coniques.* (*Surfaces coniques en général.*) — La direction d'une droite dans l'espace étant définie par les deux angles $\omega$ et $\theta$, que nous avons considérés dans le système des coordonnées sphériques, il est clair que tout cône ayant son sommet à l'origine des coordonnées pourra être représenté par une équation de la forme $\omega = f(\theta)$, qui exprime la condition à laquelle doit satisfaire une génératrice quelconque de la surface. Si l'équation du cône était donnée en coordonnées rectilignes, sous forme de l'équation homogène $F(x, y, z) = 0$, on obtiendrait immédiatement la forme précédente, en y remplaçant $x$, $y$, $z$ par les expressions (146), ce qui donnera simplement

$$(162^{bis}) \qquad F(\sin\theta\cos\omega, \sin\theta\sin\omega, \cos\theta) = 0,$$

la coordonnée $r$ disparaissant d'elle-même par suite de l'homogénéité, puis résolvant ensuite cette dernière équation par rapport à $\omega$.

Soit donc $\omega = f(\theta)$ l'équation du cône donné, dont on se propose de déterminer les lignes géodésiques; si nous envisageons la famille de cônes $\omega - f(\theta) = C$, cette dernière équation pouvant encore être interprétée comme celle des courbes, traces de ces mêmes cônes sur la sphère de rayon égal à l'unité, nous chercherons d'abord les trajectoires orthogonales sur la même sphère de ces courbes, et nous les prendrons comme directrices d'une seconde famille de cônes, qui sera dès lors manifestement orthogonale avec la première. A cet effet, chacun des éléments des deux lignes en question pouvant être confondus avec un élément d'arc de grand cercle, si nous supposons tracés sur la sphère de rayon 1 la série des méridiens définis par l'équation

Digitized by Google

$\omega = const.$, et aussi la série des parallèles définis par l'équation $\theta = const.$, et que nous désignions par $V_1$ et $V_2$ les angles formés avec le parallèle correspondant par deux éléments de grand cercle quelconques $MM_1$ et $MM_2$ ayant une extrémité commune M, il est clair que la condition de perpendicularité de ces deux éléments sera

$$V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad \cos(V_1 - V_2) = 0,$$

c'est-à-dire, en développant,

$$\cos V_1 \cos V_2 + \sin V_1 \sin V_2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad 1 + \operatorname{tang} V_1 \operatorname{tang} V_2 = 0,$$

condition complètement analogue à la relation connue entre les coefficients angulaires pour les droites tracées sur un plan.

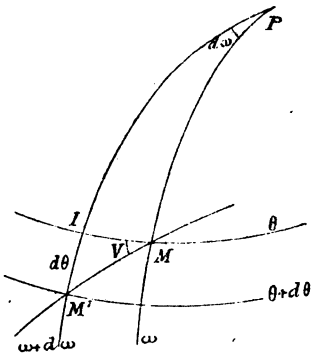


Fig. 6.

D'autre part, si nous désignons par V l'angle analogue pour un élément quelconque MM', et que nous tracions les deux cercles méridiens d'azimuts $\omega$ et $\omega + d\omega$, et les deux parallèles de colatitudes $\theta$ et $\theta + d\theta$, correspondants à ces deux extrémités M et M', la considération du triangle infinitésimal MIM' donnant immédiatement

$$d\theta = \sin\theta d\omega \,.\, \operatorname{tang} V,$$

on aura en général

$$\operatorname{tang} V = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\theta}{d\omega};$$

d'où il résulte, que la condition de perpendicularité de deux éléments de lignes quelconques tracées sur la sphère, en leur point de rencontre, sera

$$1 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_1\left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_2 = 0,$$

Digitized by Google

en distinguant par un indice les dérivées qui se rapportent à chacune des deux courbes.

D'après cette formule, ayant pour la famille de cônes $\omega - f(\theta) = C$,

$$\left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_1 = \frac{1}{\dfrac{d\omega}{d\theta}} = \frac{1}{f'(\theta)},$$

on voit que les trajectoires orthogonales de ces surfaces seront fournies par l'équation différentielle

$$1 + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{f'(\theta)}\left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad d\omega = -\frac{d\theta}{\sin^2\theta . f'(\theta)},$$

et en intégrant

$$\omega = -\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta . f'(\theta)} + C'.$$

Ces préliminaires admis, continuant à suivre la voie et les procédés qui nous ont conduits dans la question précédente, pour trouver les lignes géodésiques du cône $\omega = f(\theta)$, nous envisagerons le système coordonné

$$(163) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \varphi^2, \qquad \omega + \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta . f'(\theta)} = \psi, \qquad \omega - f(\theta) = \varpi,$$

formé d'une famille de sphères concentriques, et de deux familles de cônes orthogonales entre elles, ayant toutes deux leur sommet au centre des sphères, et dont la seconde comprend le cône donné pour la valeur du paramètre $\varpi = 0$.

Les équations de définition qui précèdent nous donnent, étant différentiées,

$$x = \varphi\frac{d\varphi}{dx}, \qquad y = \varphi\frac{d\varphi}{dy}, \qquad z = \varphi\frac{d\varphi}{dz},$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega}{dx} + \dfrac{1}{\sin^2\theta . f'(\theta)} \cdot \dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{d\psi}{dx}, & \dfrac{d\omega}{dx} - f'(\theta)\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{d\varpi}{dx}, \\ \dfrac{d\omega}{dy} + \dfrac{1}{\sin^2\theta . f'(\theta)} \cdot \dfrac{d\theta}{dy} = \dfrac{d\psi}{dy}, & \dfrac{d\omega}{dy} - f'(\theta)\dfrac{d\theta}{dy} = \dfrac{d\varpi}{dy}, \\ \dfrac{d\omega}{dz} + \dfrac{1}{\sin^2\theta . f'(\theta)} \cdot \dfrac{d\theta}{dz} = \dfrac{d\psi}{dz}, & \dfrac{d\omega}{dz} - f'(\theta)\dfrac{d\theta}{dz} = \dfrac{d\varpi}{dz}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Des trois premières nous concluerons d'abord, comme nous l'avons fait pour le cas particulier du cône de révolution,

$$(164)\qquad x^2+y^2+z^2=\rho^2.\Delta_1^2\rho \qquad \text{ou} \qquad \Delta_1^2\rho=1, \qquad H=\Delta_1^{-2}\rho=1;$$

et de même de chacun des deux autres groupes de trois équations, en élevant au carré et ajoutant,

$$(165)\qquad \Delta_1^2\omega+\frac{2}{\sin^2\theta.f'(\theta)}\left(\frac{d\theta}{dx}\frac{d\omega}{dx}+\frac{d\theta}{dy}\frac{d\omega}{dy}+\frac{d\theta}{dz}\frac{d\omega}{dz}\right)+\frac{1}{\sin^4\theta\, f'(\theta)^2}\Delta_1^2\theta=\Delta_1^2\psi,$$

$$(166)\qquad \Delta_1^2\omega-2f'(\theta)\left(\frac{d\theta}{dx}\frac{d\omega}{dx}+\frac{d\theta}{dy}\frac{d\omega}{dy}+\frac{d\theta}{dz}\frac{d\omega}{dz}\right)+f'(\theta)^2.\Delta_1^2\theta=\Delta_1^2\varpi.$$

Or, d'une part, les deux familles de surfaces $\omega = const.$ et $\theta = const.$, c'est-à-dire les plans méridiens et les cônes de révolution, qui constituent avec la sphère le système sphérique déjà étudié, étant orthogonales entre elles, nous avons

$$(167)\qquad \frac{d\theta}{dx}\frac{d\omega}{dx}+\frac{d\theta}{dy}\frac{d\omega}{dy}+\frac{d\theta}{dz}\frac{d\omega}{dz}=0.$$

D'autre part, la valeur des paramètres $\Delta_1^2\omega$ et $\Delta_1^2\theta$, qui figurent dans l'expression précédente, nous seront immédiatement fournies par l'expression générale de l'élément d'arc appliquée au système des coordonnées sphériques, savoir

$$ds^2=dn^2+dn'^2+dn''^2=\left(\frac{dr}{\Delta_1 r}\right)^2+\left(\frac{d\theta}{\Delta_1\theta}\right)^2+\left(\frac{d\omega}{\Delta_1\omega}\right)^2,$$

laquelle, comparée à l'expression classique

$$(168)\qquad ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,.\,d\omega^2,$$

donnera

$$\frac{1}{\Delta_1^2 r}=1, \qquad \frac{1}{\Delta_1^2\theta}=r^2, \qquad \frac{1}{\Delta_1^2\omega}=r^2\sin\theta,$$

Digitized by Google

et, par conséquent, dans le calcul actuel, où nous avons appelé $\varphi$ le rayon de la sphère,

$$(168^{bis}) \qquad \Delta_1^2\theta = \frac{1}{\varphi^2}, \qquad \Delta_1^2\omega = \frac{1}{\varphi^2\sin^2\theta}.$$

Reportant donc ces valeurs dans les équations (165) et (166), en tenant compte de la suivante (167), et permutant les deux membres, nous obtiendrons

$$(169) \quad \begin{cases} \Delta_1^2\psi = \dfrac{1}{\varphi^2\sin^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^4\theta.f'(\theta)^2}\cdot\dfrac{1}{\varphi^2} = \dfrac{1+\sin^2\theta.f'(\theta)^2}{\varphi^2\sin^4\theta.f'(\theta)^2}, \\ \Delta_1^2\varpi = \dfrac{1}{\varphi^2\sin^2\theta} + f'(\theta)^2\cdot\dfrac{1}{\varphi^2} = \dfrac{1+\sin^2\theta.f'(\theta)^2}{\varphi^2\sin^2\theta}, \end{cases}$$

d'où, enfin, pour K et J les expressions cherchées

$$(170) \qquad K = \varphi^2\cdot\frac{\sin^4\theta.f'(\theta)^2}{1+\sin^2\theta.f'(\theta)^2}, \qquad J = \frac{\varphi^2\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta.f'(\theta)^2}.$$

Or, l'élimination de $\omega$ entre les deux dernières équations (163) conduisant à l'équation

$$(171) \qquad f(\theta) + \int\frac{d\theta}{\sin^2\theta.f'(\theta)} = \psi - \varpi,$$

laquelle, résolue par rapport à $\theta$, fournira une valeur telle que

$$(172) \qquad \theta = \mathcal{F}(\psi - \varpi),$$

si l'on suppose remise cette dernière valeur à la place de $\theta$ dans l'expression (170) que nous venons de trouver pour K, on voit qu'elle prendra bien la forme $\Phi(\varphi)\Psi(\psi)$; par conséquent, les hypothèses (129) du cas II seront encore une fois réalisées pour le cas actuel, en prenant, après la substitution que nous venons de dire,

$$(173) \qquad F(\varphi) = 1, \qquad \Phi(\varphi) = \varphi^2, \qquad \Psi(\psi) = \frac{\sin^4\theta.f'(\theta)^2}{1+\sin^2\theta.f'(\theta)^2},$$

Digitized by Google

et dès lors, par la substitution de ces valeurs, les formules (131) fourniront immédiatement la solution du problème.

Mais, de même que dans l'exemple précédent relatif aux surfaces de révolution, au lieu de substituer à $\theta$ sa valeur (172) en $\psi$ dans la formule précédente (170), pour arriver à l'équation en $\varphi$ et $\psi$ de la ligne géodésique, on pourra conserver la variable $\theta$, en déduisant par la différentiation de l'équation (171)

$$d\psi = \left[f'(\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta . f'(\theta)}\right] d\theta = \frac{1 + \sin^2\theta . f'(\theta)^2}{\sin^2\theta . f'(\theta)} d\theta,$$

et, par suite, les valeurs (173), donnant

$$\begin{cases} \int \sqrt{\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{C^2\psi(\varphi) - 1}} = \int \frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{C^2\varphi^2 - 1}} = \arccos\frac{1}{C\varphi} + \text{const}, \\ \int \sqrt{\psi(\psi)}\, d\psi = \int \frac{\sin^2\theta . f'(\theta)}{\sqrt{1 + \sin^2\theta . f'(\theta)^2}} \frac{1 + \sin^2\theta . f'(\theta)^2}{\sin^2\theta . f'(\theta)} d\theta \\ \qquad = \int \sqrt{1 + \sin^2\theta . f'(\theta)^2}\, d\theta + \text{const}, \end{cases}$$

la solution définitive du problème, fournie par les formules (131), sera, en remettant à la place de $\varphi$ sa valeur $r$, qu'elle était censée représenter dans ce calcul,

$$\arccos\frac{1}{Cr} - \int \sqrt{1 + \sin^2\theta . f'(\theta)^2}\, d\theta = C', \tag{174}$$

qui sera alors l'équation de cette ligne exprimée en coordonnées sphériques. On verrait d'ailleurs, exactement comme pour le cas particulier du cône de révolution déjà traité, que la seconde équation (131) ne fournit pas une solution distincte de la première.

Le calcul qui précède, tel que nous venons de le présenter pour la plus grande facilité du raisonnement, suppose une condition qui peut n'être pas toujours remplie, à savoir que l'on puisse résoudre par rapport à $\omega$ l'équation du cône supposée donnée entre $\omega$ et $\theta$. Ainsi, par exemple, le cas du cône de révo-

Digitized by Google

lution traité un peu plus haut échappe à la formule précédente, par la raison que l'équation $\theta = const.$, ne contenant pas $\omega$, ne peut être résolue par rapport à cette variable. Pour éviter cette difficulté, il vaudra mieux laisser dans l'intégrale qui figure à l'équation précédente la variable indépendante indéterminée, en remarquant que l'on a

$$\int \sqrt{1+\sin^2\theta\, f'(\theta)^2}\, d\theta = \int \sqrt{d\theta^2+\sin^2\theta . f'(\theta)^2 d\theta^2} = \int \sqrt{d\theta^2+\sin^2\theta . d\omega^2},$$

et d'écrire dès lors ainsi l'équation (174)

$$(174^{bis}) \qquad \arccos\frac{1}{Cr} - \int \sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta . d\omega^2} = C',$$

ce qui permettra de supposer indifféremment l'équation du cône résolue, soit par rapport à $\omega$, soit par rapport à $\theta$, ou même, dans le cas où ces deux modes de résolution présenteraient une égale difficulté, de supposer l'une et l'autre de ces variables exprimées à la fois à l'aide d'une même variable auxiliaire, ce qui sera évidemment toujours possible en la choisissant convenablement. Avec cette dernière forme d'équation, on retrouve bien, comme l'on voit, le résultat (148) obtenu pour le cône de révolution en y faisant simplement $\theta = const.$

L'équation ($174^{bis}$) que nous venons d'obtenir, de même que celle trouvée pour les cylindres, est susceptible d'une interprétation, qui met encore en évidence d'une façon simple la propriété de la plus courte distance. En effet, l'expression (168) de l'élément d'arc en coordonnées sphériques pouvant s'écrire

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta . d\omega^2),$$

donne pour l'élément $ds$ de la ligne géodésique en particulier

$$d\theta^2 + \sin^2\theta . d\omega^2 = \frac{1}{r^2}(ds^2 - dr^2),$$

ou, en extrayant les racines,

$$(175) \qquad \sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta . d\omega^2} = \frac{1}{r}\sqrt{ds^2 - dr^2}.$$

Digitized by Google

Or, il est visible que cette dernière expression représente exactement l'angle $d\Omega$, compris sur la surface du cône entre deux génératrices infiniment voisines, lequel n'est pas altéré par le développement de la surface sur un plan; car si OM et OM′ sont les deux génératrices correspondant aux deux extrémités de l'élément MM′ de la ligne géodésique, et que l'on décrive du sommet O comme centre l'arc de cercle infiniment petit MN, lequel peut être assimilé à une perpendiculaire à OM′, la considération du triangle rectangle infinitésimal MNM′ donnera pour mesure de l'angle compris $d\Omega$ :

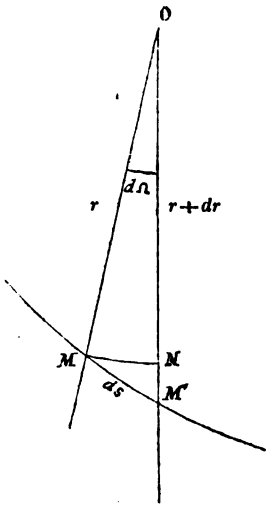


Fig. 7.

$$(175^{bis}) \qquad d\Omega = \frac{MN}{OM} = \frac{\sqrt{ds^2 - dr^2}}{r}.$$

Si donc on suppose la surface entière de l'une des nappes du cône développée sur un plan, on aura, d'après l'équation (175), en appelant $\Omega$ l'angle compris entre une génératrice fixe prise pour origine et une génératrice variable,

$$(176) \qquad \int \sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta \, . \, d\omega^2} = \int \frac{1}{r} \sqrt{ds^2 - dr^2} = \int d\Omega = \Omega + C';$$

et, par conséquent, l'équation ($174^{bis}$), où il n'entre dès lors que les quantités $r$ et $\Omega$, qui ne sont pas modifiées par le développement, pourra, après la substitution de la valeur qui précède, être considérée comme l'équation en coordonnées polaires de la ligne géodésique développée sur le plan, équation qui sera alors

$$(177) \qquad \arccos \frac{1}{Cr} = \Omega + C', \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{C} = r \cos(\Omega + C'),$$

Digitized by Google

c'est-à-dire celle d'une droite, ce qui établit bien directement, comme pour les cylindres, la propriété de la plus courte distance. Il est clair, d'ailleurs, qu'en reprenant en ordre inverse la série des raisonnements que nous venons de présenter, on pourrait ainsi, en admettant comme point de départ la propriété de la plus courte distance, supposée démontrée en général comme conséquence de la définition des lignes géodésiques, remonter dans ce cas particulier à l'équation (174) ou à l'équation de la ligne géodésique des surfaces coniques elle-même, et ce procédé, bien qu'assez peu direct, est peut-être la voie la plus facile pour arriver à cette équation, si l'on ne veut pas faire usage, comme nous l'avons fait, des coordonnées curvilignes.

Proposons-nous enfin de déterminer encore l'arc et le rayon de courbure de la ligne géodésique représentée par l'équation (174) ou ($174^{bis}$), que nous venons de trouver pour une surface conique quelconque.

Pour cela la première de nos formules (140), correspondant aux hypothèses (129) qui nous ont servi pour le calcul de cette équation, nous donne tout d'abord pour $s$, en remplaçant $F(\varphi)$ et $\Phi(\varphi)$ par leurs valeurs (173),

$$(178)\quad s = C\int \sqrt{\frac{1}{\rho^2}}\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{C^2\rho^2-1}} = \frac{1}{C}\int \frac{C^2\rho d\rho}{\sqrt{C^2\rho^2-1}} = \frac{1}{C}\sqrt{C^2\rho^2-1}.$$

Pour la seconde, H étant une constante d'après la valeur (164), il suffira de calculer la valeur de la dérivée $\frac{lK}{\varpi}$ d'après l'expression (170), qui donne

$$lK = l.\rho^2 + l\left(\frac{\sin^4\theta.f'(\theta)^2}{1+\sin^2\theta.f'(\theta)^2}\right),$$

en y considérant $\theta$ comme une fonction de $\varpi$ définie par l'équation (171), de laquelle on tirera par la différentiation

$$\left[f'(\theta)+\frac{1}{\sin^2\theta.f'(\theta)}\right]\frac{d\theta}{d\varpi} = -1, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\theta}{d\varpi} = \frac{-\sin^2\theta.f'(\theta)}{1+\sin^2\theta.f'(\theta)^2}.$$

Digitized by Google

On obtiendra ainsi pour expression de la dérivée demandée

$$\frac{lK}{\varpi} = \frac{\partial lK}{\partial \theta}\frac{d\theta}{d\varpi} = \frac{dl}{d\theta}\left(\frac{\sin^4\theta . f'(\theta)^2}{1 + \sin^2\theta . f'(\theta)^2}\right)\frac{-\sin^2\theta . f'(\theta)}{1 + \sin^2\theta . f'(\theta)^2},$$

et, par suite, en la reportant, ainsi que la valeur (169) de $\Delta_1\varpi$, dans la seconde formule (140), on aura pour expression de la courbure cherchée

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2C^2\varphi^2}\frac{\sqrt{1 + \sin^2\theta . f'(\theta)^2}}{\varphi \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\log\left(\frac{\sin^4\theta . f'(\theta)^2}{1 + \sin^2\theta . f'(\theta)^2}\right)\frac{-\sin^2\theta . f'(\theta)}{1 + \sin^2\theta . f'(\theta)^2},$$

c'est-à-dire, en réduisant, et remplaçant $\varphi$ par sa valeur $r$ dans la question,

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{C}{2}\left(\frac{1}{Cr}\right)^3 \frac{\sin\theta . f'(\theta)}{\sqrt{1 + \sin^2\theta . f'(\theta)^2}}\frac{d}{d\theta}\log\left(\frac{\sin^4\theta . f'(\theta)^2}{1 + \sin^2\theta . f'(\theta)^2}\right). \tag{179}$$

Si l'on voulait avoir la même quantité exprimée en fonction d'une seule coordonnée, il suffirait de remplacer dans cette dernière expression $\frac{1}{Cr}$ par sa valeur tirée de l'équation de la courbe (174), qui est

$$\frac{1}{Cr} = \cos\left(C' + \int \sqrt{1 + \sin^2\theta . f'(\theta)^2}\, d\theta\right).$$

Nous eussions pu encore, à la rigueur, écrire sans le secours de nos formules (140) ces deux expressions que nous venons ainsi d'obtenir, et le calcul direct que nous allons en indiquer constituera de même une vérification simple et facile de ces formules. En effet, pour la première (178), en nous appuyant seulement sur la propriété géométrique (177) relative au développement de la surface et de la ligne géodésique sur un plan, cette relation exprimant que dans ce développement la projection du rayon vecteur $r$ sur la génératrice initiale (celle à partir de laquelle on compte l'arc $s$) est une quantité constante $\frac{1}{C}$,

Digitized by Google

montre que le triangle $OM_0M$ est rectangle en $M_0$, et que, par suite, l'on a dans ce triangle

$$s^2 = r^2 - \left(\frac{1}{C}\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad s = \frac{1}{C}\sqrt{C^2r^2 - 1}.$$

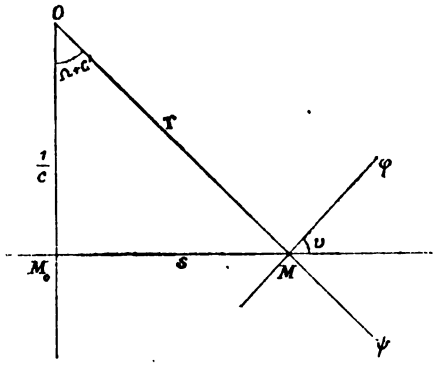



Fig. 8.

De même pour la seconde expression, celle du rayon de courbure, les mêmes considérations géométriques font voir immédiatement, la génératrice rectiligne étant l'une des lignes de courbure, que l'on doit avoir dans ce cas, par la formule d'Euler, et la propriété géométrique (177),

$$(180) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R'}\cos^2\upsilon = \frac{1}{R'}\cos^2(\Omega + C') = \frac{1}{R'}\frac{1}{C^2r^2},$$

R′ étant le rayon de courbure de la section principale normale à la génératrice rectiligne, et, dès lors, toute la question est ramenée simplement à calculer ce rayon principal R′. A la vérité, nous ne pouvons plus dans le cas actuel, comme nous l'avons fait pour le cas précédent des surfaces de révolution, obtenir l'expression de ce rayon par la seule application du théorème de Meunier; mais, dans ce cas-ci, l'une des deux courbures principales étant nulle, nous n'aurons qu'à invoquer pour cet objet la formule générale, que nous avons donnée dans notre *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces* pour l'expression de la

Digitized by Google

somme des deux courbures principales pour une surface quelconque $\varphi(x, y, z) = 0$, expression fournie par l'équation (26) (page 22, *au bas*) de ce Mémoire (cette quantité étant désignée par H dans ce travail), et qui, appliquée à notre surface $\varpi$ actuelle, donnera présentement, à cause de $\frac{1}{R''} = 0$,

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{\Delta_1 \varpi}\left[\frac{\varpi^2}{x^2} + \frac{\varpi^2}{y^2} + \frac{\varpi^2}{z^2} - \left(\lambda'' \frac{\Delta_1 \varpi}{x} + \mu'' \frac{\Delta_1 \varpi}{y} + \nu'' \frac{\Delta_1 \varpi}{z}\right)\right],$$

$\lambda''$, $\mu''$, $\nu''$ désignant toujours les cosinus directeurs de la normale, qui sont

$$\lambda'' = \frac{1}{\Delta_1 \varpi}\frac{\varpi}{x}, \qquad \mu'' = \frac{1}{\Delta_1 \varpi}\frac{\varpi}{y}, \qquad \nu'' = \frac{1}{\Delta_1 \varpi}\frac{\varpi}{z},$$

et qui donnent, pour le premier en particulier,

$$\lambda'' \frac{\Delta_1 \varpi}{x} = \frac{1}{\Delta_1 \varpi}\frac{\varpi}{x}\frac{\Delta_1 \varpi}{x} = \frac{\varpi}{x}\frac{l\Delta_1 \varpi}{x} = \frac{d\varpi}{dx}\frac{d.lJ^{-\frac{1}{2}}}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{d\varpi}{dx}\frac{dlJ}{dx},$$

et par suite, en ajoutant les trois expressions semblables,

$$\lambda'' \frac{\Delta_1 \varpi}{x} + \mu'' \frac{\Delta_1 \varpi}{y} + \nu'' \frac{\Delta_1 \varpi}{z} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\varpi}{dx}\frac{dlJ}{dx} + \frac{d\varpi}{dy}\frac{dlJ}{dy} + \frac{d\varpi}{dz}\frac{dlJ}{dz}\right);$$

valeur qui, étant substituée dans l'expression qui précède de $\frac{1}{R'}$, permettra de l'écrire sous la forme simple

$$\frac{1}{R'} = J^{\frac{1}{2}}\left(\Delta_2 \varpi + \frac{1}{2} G\right) = \frac{1}{2} J^{\frac{1}{2}}(2\Delta_2 \varpi + G), \tag{181}$$

en convenant de poser, pour faciliter les transformations qui vont suivre,

$$G = \frac{d\varpi}{dx}\frac{dlJ}{dx} + \frac{d\varpi}{dy}\frac{dlJ}{dy} + \frac{d\varpi}{dz}\frac{dlJ}{dz}. \tag{182}$$

Or, les deux termes, qui entrent alors dans la parenthèse dans cette dernière valeur de $\frac{1}{R'}$, peuvent se calculer encore aisément. En effet, d'une part, l'expression en coordonnées sphériques du paramètre différentiel $\Delta_2$ d'une fonction de point quelconque V,

Digitized by Google

expression devenue pour ainsi dire classique depuis les célèbres travaux de Laplace sur l'attraction, se trouve dans tous les traités d'analyse sous la forme suivante (*)

$$\Delta_2 V = \frac{1}{r}\frac{d^2\, rV}{dr^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2V}{d\omega^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d\left(\sin\theta\dfrac{dV}{d\theta}\right)}{d\theta},$$

et donne par suite en particulier, en faisant successivement $V = \omega$, puis $V = \theta$,

$$\Delta_2\omega = 0, \qquad \Delta_2\theta = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d\sin\theta}{d\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{d.l\sin\theta}{d\theta},$$

d'où l'on concluera, par conséquent, pour le $\Delta_2$ de la fonction $\varpi$, définie par notre dernière équation (163), et en tenant compte de la valeur ($168^{bis}$) de $\Delta_1^2\theta$,

$$(183)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_2\varpi = \Delta_2\omega - \Delta_2 f(\theta) &= -\left[f'(\theta)\Delta_2\theta + f''(\theta)\Delta_1^2\theta\right] \\ &= -\frac{1}{r^2}\left[f'(\theta)\frac{d.l\sin\theta}{d\theta} + f''(\theta)\right] \\ &= -\frac{f'(\theta)}{r^2}\left[\frac{d.l\sin\theta}{d\theta} + \frac{d.lf'(\theta)}{d\theta}\right] \\ &= -\frac{f'(\theta)}{r^2}\frac{d}{d\theta}\log\left(\sin\theta f'(\theta)\right). \end{aligned}\right.$$

D'autre part, l'expression de $lJ$ étant nécessairement, de même que celle (170) de J, une fonction des seules coordonnées sphériques $r$ et $\theta$, on a pour l'une quelconque $\alpha$ des trois coordonnées rectilignes

$$\frac{dlJ}{d\alpha} = \frac{dlJ}{dr}\frac{dr}{d\alpha} + \frac{dlJ}{d\theta}\frac{d\theta}{d\alpha},$$

(*) Voir, par exemple, SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, t. I, § 91, 1re édition, p. 129, en haut.

Digitized by Google

en sorte que l'on aura, en faisant successivement $\alpha = x, y, z$, pour expression de la quantité ci-dessus (182),

$$G = \frac{dlJ}{dr}\left(\frac{d\varpi}{dx}\frac{dr}{dx} + \frac{d\varpi}{dy}\frac{dr}{dy} + \frac{d\varpi}{dz}\frac{dr}{dz}\right)$$
$$+ \frac{dlJ}{d\theta}\left(\frac{d\varpi}{dx}\frac{d\theta}{dx} + \frac{d\varpi}{dy}\frac{d\vartheta}{dy} + \frac{d\varpi}{dz}\frac{d\theta}{dz}\right).$$

Or, les deux familles de surfaces $r = \varphi = const.$ et $\varpi = const.$ faisant partie l'une et l'autre du système coordonné (163), et étant dès lors par hypothèse orthogonales entre elles, la première parenthèse est évidemment nulle, en sorte que la valeur de G sera simplement tout d'abord, en tenant compte de celle (163) de la fonction $\varpi$,

$$G = \frac{dlJ}{d\theta}\left[\frac{d\theta}{dx}\left(\frac{d\omega}{dx} - f'(\theta)\frac{d\theta}{dx}\right) + \frac{d\theta}{dy}\left(\frac{d\omega}{dy} - f'(\theta)\frac{d\theta}{dy}\right) + \frac{d\theta}{dz}\left(\frac{d\omega}{dz} - f'(\theta)\frac{d\theta}{dz}\right)\right]$$
$$= \frac{dlJ}{d\theta}\left[\frac{d\theta}{dx}\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\theta}{dy}\frac{d\omega}{dy} + \frac{d\theta}{dz}\frac{d\omega}{dz} - f'(\theta)\left\{\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2\right\}\right],$$

laquelle expression, en ayant égard de nouveau à l'orthogonalité des deux familles de surfaces $\theta = const.$ et $\omega = const.$ empruntées au système sphérique (147), se réduira définitivement à

$$(184) \qquad G = \frac{dlJ}{d\theta}\left[-f'(\theta)\Delta_1^2\theta\right] = -\frac{f'(\theta)}{r^2}\frac{dlJ}{d\vartheta}.$$

En substituant dès lors ces deux valeurs (183) et (184) dans la seconde expression (181) de $\frac{1}{R'}$, on trouvera donc pour celle-ci

$$\frac{1}{R'} = -\frac{J^{\frac{1}{2}}f'(\theta)}{2r^2}\left[2\frac{d}{d\theta}\log\left(\sin\theta f'(\theta)\right) + \frac{d\log J}{d\theta}\right]$$
$$= -\frac{J^{\frac{1}{2}}f'(\theta)}{2r^2}\frac{d}{d\theta}\log\left(J\sin^2\theta f'(\theta)^2\right);$$

et, enfin, en substituant cette dernière expression elle-même

Digitized by Google

dans celle (180) de $\frac{1}{\rho}$, on aura définitivement pour la courbure cherchée

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{J^{\frac{1}{2}} f'(\theta)\, d}{2C^2 r^5\, d\theta} \log\left(J \sin^2\theta\, f'(\theta)^2\right),$$

expression qui, en tenant compte de la valeur (170) de J, coïncide exactement avec celle que nous avait fournie presque immédiatement notre formule (140), et la série assez longue des calculs, par lesquels nous avons dû passer pour l'obtenir par la voie que nous venons d'indiquer en dernier lieu, comparée à la facilité avec laquelle notre formule (140) nous avait donné la même expression, permet d'apprécier le service rendu par cette formule et ses analogues, même pour les cas où elles ne seraient pas absolument indispensables.

Nous terminerons cette théorie, relative aux surfaces coniques en général, par quelques exemples d'application de la méthode que nous venons d'exposer.

1° Considérons en premier lieu le cône

$$(x^2 + y^2)^2 = z^2(x^2 - y^2),$$

qui admet l'axe des $z$ pour axe de symétrie, et dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe des $z$ sont des lemniscates semblables, ayant toutes leur centre sur l'axe $z$, en sorte que chacune des deux nappes du cône se compose, pour ainsi dire, de deux nappes secondaires reliées entre elles précisément par cette arête.

L'équation de cette surface, transformée en coordonnées sphériques, étant

$$r^2(\sin^2\theta)^2 = r^2\cos^2\theta . r^2 \sin^2\theta(\cos^2\omega - \sin^2\omega) \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}^2\theta = \cos 2\omega,$$

peut être résolue indifféremment par rapport à $\omega$ ou par rapport à $\theta$. Adoptant donc le premier mode de calcul, on aura pour l'équation $\omega = f(\theta)$ dans ce cas

$$\omega = \frac{1}{2} \arccos(\operatorname{tang}^2\theta),$$

Digitized by Google

laquelle donnera tout d'abord

$$\frac{d\omega}{d\theta} = f'(\theta) = \frac{1}{2}\frac{2\operatorname{tang}\theta.\frac{1}{\cos^2\theta}}{\sqrt{1-(\operatorname{tg}^2\theta)^2}} = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\sqrt{\cos^4\theta-\sin^4\theta}} = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}},$$

puis en partant de là, successivement

$$1+\sin^2\theta\, f'(\theta)^2 = 1+\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)} = \frac{\cos^4\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta}{\cos^2\theta.\cos 2\theta}$$

$$= 2\frac{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-3\sin^2\theta\cos^2\theta}{2\cos^2\theta.\cos 2\theta} = 2\frac{1-\frac{3}{4}\sin^2 2\theta}{(1+\cos 2\theta)\cos 2\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4-3(1-\cos^2 2\theta)}{\cos 2\theta(1+\cos 2\theta)} = \frac{1}{2}\frac{1+3\cos^2 2\theta}{\cos 2\theta(1+\cos 2\theta)};$$

et par conséquent l'équation (174) donnera alors pour celle de la ligne géodésique cherchée

$$\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{Cr} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\sqrt{\frac{1+3\cos^2 2\theta}{\cos 2\theta(1+\cos 2\theta)}}\,d.2\theta + C',$$

équation dans laquelle l'intégrale qui y figure, se transformant tout naturellement, lorsqu'on y fait $\cos 2\theta = u$, et $d.2\theta = \frac{du}{-\sin 2\theta} = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$, de la façon suivante

$$\int\sqrt{\frac{1+3\cos^2 2\theta}{\cos 2\theta(1+\cos 2\theta)}}\,d.2\theta = -\int\sqrt{\frac{1+3u^2}{u(1+u)}}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= -\int\frac{(1+3u^2)\,du}{\sqrt{(1+3u^2).u(1+u)^2(1-u)}}$$

$$= -\int\frac{1+3u^2}{1+u}\frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1+3u^2)}},$$

ne dépend par conséquent que des seules fonctions elliptiques.



Digitized by Google

2° Considérons en second lieu le cône du second ordre déjà envisagé

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

dont l'équation, transformée en coordonnées sphériques, devient

$$\frac{1}{a^2}\sin^2\theta\cos^2\omega+\frac{1}{b^2}\sin^2\theta\sin^2\omega-\frac{1}{c^2}\cos^2\theta=0,$$

et peut être résolue également soit par rapport à $\theta$, soit par rapport à $\omega$. Toutefois, dans ce cas l'expression obtenue étant plus simple quand on résout par rapport à $\theta$, il y aura lieu d'adopter pour cet exemple le second mode de calcul, qui consistera alors à tirer tout d'abord de l'équation précédente

$$(185)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2b^2}(a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega)\tang^2\theta=\dfrac{1}{c^2}, \\ \tang\theta=\pm\dfrac{ab}{c\sqrt{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega}}=\pm\dfrac{ab}{c}S^{-\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$(186)\quad \begin{cases} S=a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega \\ T=a^2b^2+c^2S=a^2(b^2+c^2)\sin^2\omega+b^2(a^2+c^2)\cos^2\omega, \end{cases}$$

d'où l'on conclura

$$(187)\qquad \sin^2\theta=\frac{a^2b^2}{T},\qquad \cos^2\theta=\frac{c^2S}{T},\qquad \frac{\cos^2\theta}{S}=\frac{c^2}{T}=\frac{c^2}{a^2b^2}\sin^2\theta,$$

puis, en différentiant la seconde des valeurs (185),

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\mp\frac{1}{2}\frac{ab}{c}S^{-\frac{3}{2}}dS,\qquad d\theta^2=\frac{1}{4}\frac{a^2b^2}{c^2S^3}\cos^4\theta\,dS^2,$$

Digitized by Google

c'est-à-dire en ayant égard à la dernière égalité (187), et à la valeur (186) de S,

$$d\theta^2 = \frac{1}{4}\frac{a^2b^2}{c^2S}\left(\frac{\cos^2\theta}{S}\right)^2 dS^2 = \frac{1}{4}\frac{a^2b^2}{c^2S}\left(\frac{c^2}{a^2b^2}\right)^2 \sin^4\theta\left[2(a^2-b^2)\sin\omega\cos\omega\, d\omega\right]^2$$

$$= \frac{c^2}{a^2b^2}\frac{(a^2-b^2)^2}{S}\sin^2\omega\cos^2\omega.\sin^4\theta\, d\omega^2;$$

et, enfin, successivement, en ayant égard également aux valeurs (187) de $\sin^2\theta$ et (186) de T,

$$d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\omega^2 = d\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\sin^4\theta\, d\omega^2$$

$$= \left[\frac{c^2}{a^2b^2}\frac{(a^2-b^2)^2}{S}\sin^2\omega\cos^2\omega + \frac{T}{a^2b^2}\right]\sin^4\theta\, d\omega^2,$$

$$\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\omega^2} = \frac{1}{ab}\sqrt{\frac{c^2(a^2-b^2)^2}{S}\sin^2\omega\cos^2\omega + T}\sin^2\theta\, d\omega$$

$$= \frac{1}{ab\sqrt{S}}\sqrt{c^2(a^2-b^2)^2\sin^2\omega\cos^2\omega + ST}\,\frac{a^2b^2}{T}d\omega$$

$$= \frac{ab}{T}\frac{c^2(a^2-b^2)^2\sin^2\omega\cos^2\omega + ST}{\sqrt{S}\sqrt{c^2(a^2-b^2)^2\sin^2\omega\cos^2\omega + S(a^2b^2+c^2S)}}d\omega$$

$$= \left[S + \frac{c^2(a^2-b^2)^2\sin^2\omega\cos^2\omega}{T}\right]\frac{ab\, d\omega}{\sqrt{c^2(a^2-b^2)^2\sin^2\omega\cos^2\omega S + a^2b^2S^2 + c^2S^3}};$$

de telle sorte, qu'en remettant définitivement dans cette dernière expression, à la place de S et T, les valeurs (186) qu'elles sont censées représenter, notre formule ($174^{bis}$) nous donnera alors pour l'équation de la ligne géodésique demandée

$$\left\{\begin{array}{l} \text{arc}\cos\dfrac{1}{Cr} = C' + \displaystyle\int\left[a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega + \frac{c^2(a^2-b^2)^2\sin^2\omega\cos^2\omega}{a^2(b^2+c^2)\sin^2\omega + b^2(a^2+c^2)\cos^2\omega}\right] \\ \times \dfrac{ab\, d\omega}{\sqrt{c^2(a^2-b^2)^2\sin^2\omega\cos^2\omega(a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega) + a^2b^2(a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega)^2 + c^2(a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega)^3}}. \end{array}\right.$$

Digitized by Google

Si pour calculer effectivement l'intégrale qui figure dans cette dernière équation, on pose encore $\cos\omega = u$, $d\omega = \frac{du}{-\sin\omega} = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$, la quantité soumise au radical sous le signe $\int$ devenant alors un polynôme du 4e degré en $u^2$, ou du 8e degré en $u$, pendant que le facteur entre crochets se changera en une simple fonction rationnelle de $u$, on voit dès lors que cette intégrale dépendra ainsi des fonctions hyperelliptiques de la seconde classe.

Nous indiquerons un peu plus loin un moyen beaucoup plus simple de traiter le même problème, à l'aide d'un choix de variables plus spécialement approprié à la question.

3° Considérons en dernier lieu, comme exemple du troisième mode de calcul que nous avons indiqué, le cône

$$y^2 - 2myz + \left(x - mz \arccos \frac{mz - y}{mz}\right)^2 = 0,$$

$m$ désignant un simple coefficient numérique. Cette même équation pouvant encore être écrite, en séparant d'abord en deux membres, puis extrayant les racines,

$$x - mz \arccos \frac{mz - y}{mz} = \pm \sqrt{2myz - y^2}$$

ou

$$x = mz \arccos \frac{mz - y}{mz} \pm \sqrt{2mz \cdot y - y^2}, \tag{188}$$

on reconnaît à première vue que les sections de cette surface par des plans perpendiculaires à l'axe des $z$ sont des cycloïdes semblables, ayant toutes leurs bases situées dans le plan des $zx$, et proportionnelles à la distance de leur plan au sommet du cône, c'est-à-dire, en termes plus précis, parallèles, dans un même plan, et vues toutes du sommet sous un même angle, dont la tangente est $m$.

La dernière de ces équations, transformée en coordonnées

Digitized by Google

sphériques, c'est-à-dire l'équation (162bis) de notre théorie, étant dans le cas actuel

$$\sin\theta\cos\omega = m\cos\theta\,.\,\text{arc cos}\,\frac{m\cos\theta - \sin\theta\sin\omega}{m\cos\theta} \pm \sqrt{2m\sin\theta\cos\theta\sin\omega - \sin^2\theta\sin^2\omega},$$

et contenant également les lignes trigonométriques des deux variables $\theta$ et $\omega$, à la fois en termes algébriques, et engagées sous le symbole transcendant *arc cos*, ne peut être résolue en l'état par rapport à aucune de ces deux variables isolément. Il y a donc nécessité d'introduire, comme nous l'avons expliqué, une variable auxiliaire tellement choisie, que l'on puisse obtenir séparément les expressions de $\theta$ et de $\omega$ en fonction de cette variable. Dès lors il sera tout naturel, d'après la forme que nous venons de reconnaître à la surface, d'adopter pour cette variable auxiliaire précisément celle dont on fait habituellement usage pour écrire les équations de la cycloïde, en remplaçant par conséquent la seule équation (162bis) par le système des deux équations

(189) $$\sin\theta\cos\omega = m\cos\theta(u - \sin u), \qquad \sin\theta\sin\omega = m\cos\theta(1 - \cos u).$$

En ajoutant donc ces deux équations, après les avoir élevées au carré, nous en tirerons en premier lieu

$$\sin^2\theta = m^2\cos^2\theta\left[(u - \sin u)^2 + (1 - \cos u)^2\right] = m^2\cos^2\theta\,.\,\mathrm{D},$$

d'où

(190) $$\tang^2\theta = m^2\mathrm{D} \qquad \text{et} \qquad \tang\theta = \pm m\sqrt{\mathrm{D}},$$

en convenant de poser, pour faciliter les transformations,

(191) $$\begin{cases} \mathrm{D} = (u - \sin u)^2 + (1 - \cos u)^2 \\ \quad = u^2 - 2u\sin u + \sin^2 u + 1 - 2\cos u + \cos^2 u \\ \quad = u^2 - 2u\sin u + 2(1 - \cos u), \end{cases}$$

quantité qui donnera lieu dès lors aux deux égalités suivantes

(192) $$u(u - \sin u) = \mathrm{D} + u\sin u - 2(1 - \cos u),$$

(193) $$d\mathrm{D} = \left[2u - 2(\sin u + u\cos u) + 2\sin u\right]du = 2(1 - \cos u)u\,du,$$

Digitized by Google

et l'on conclura immédiatement des trois valeurs (190) et (193)

$$(194)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin^2\theta = \dfrac{m^2 D}{1+m^2 D}, \qquad \cos^2\theta = \dfrac{1}{1+m^2 D}, \qquad \dfrac{\sin^2\theta}{D} = \dfrac{m^2}{1+m^2 D}, \\ \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta} = \pm\dfrac{m dD}{2\sqrt{D}} = \pm\, m(1-\cos u)\dfrac{u du}{\sqrt{D}}; \end{array}\right.$$

puis de là, en ayant égard à la seconde équation (189),

$$(195)\qquad d\theta = \cos\theta . m\cos\theta(1-\cos u)\cdot\frac{u du}{\sqrt{D}} = \cos\theta . \sin\theta\sin\omega\cdot\frac{u du}{\sqrt{D}}.$$

En second lieu, en divisant membre à membre les deux équations (189), on trouvera de même successivement

$$(196)\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tang}\omega = \dfrac{1-\cos u}{u-\sin u}, \qquad \sin^2\omega = \dfrac{(1-\cos u)^2}{D}, \qquad \cos^2\omega = \dfrac{(u-\sin u)^2}{D}, \\ \dfrac{d\omega}{\cos^2\omega} = \dfrac{(u-\sin u)\sin u-(1-\cos u)^2}{(u-\sin u)^2}du = \dfrac{u(u-\sin u)-D}{(u-\sin u)^2}du, \\ d\omega = \dfrac{\cos^2\omega}{(u-\sin u)^2}\Big[u(u-\sin u)-D\Big]du = \Big[u(u-\sin u)-D\Big]\dfrac{du}{D}. \end{array}\right.$$

Or l'expression (195) de $d\theta$ devenant, en l'élevant au carré, et y reportant les valeurs (194) et (196) de $\cos^2\theta$ et $\sin^2\omega$,

$$d\theta^2 = \cos^2\theta . \sin^2\theta\sin^2\omega\cdot\frac{u^2du^2}{D} = \frac{1}{1+m^2D}\cdot\sin^2\theta\frac{(1-\cos u)^2}{D}\cdot\frac{u^2du^2}{D}$$

$$= \frac{u^2(1-\cos u)^2}{1+m^2D}\frac{\sin^2\theta}{D^2}du^2;$$

et de même l'expression (196) de $d\omega$ donnant sans peine

$$\sin^2\theta\, d\omega^2 = \Big[u(u-\sin u)-D\Big]^2\frac{\sin^2\theta}{D^2}du^2,$$

Digitized by Google

on obtiendra facilement, en ajoutant ces deux dernières égalités, puis ayant égard à la troisième (194),

$$(197)\quad \left\{\begin{aligned} d\vartheta^2 + \sin^2\theta\,.\,d\omega^2 &= \left(\frac{u^2(1-\cos u)^2}{1+m^2\mathrm{D}} + \left[u(u-\sin u)-\mathrm{D}\right]^2\right)\frac{\sin^2\theta}{\mathrm{D}^2}du^2 \\ &= \frac{u^2(1-\cos u)^2+(1+m^2\mathrm{D})\left[u(u-\sin u)-\mathrm{D}\right]^2}{1+m^2\mathrm{D}}\,\frac{m^2du^2}{\mathrm{D}(1+m^2\mathrm{D})} \\ &= \frac{m^2\mathrm{U}du^2}{\mathrm{D}(1+m^2\mathrm{D})^2}, \end{aligned}\right.$$

en posant de nouveau pour un instant

$$\mathrm{U} = u^2(1-\cos u)^2 + (1+m^2\mathrm{D})\left[u(u-\sin u)-\mathrm{D}\right]^2,$$

quantité qui, en ayant égard successivement aux deux valeurs (191) de D, se transformera de la façon suivante

$$\begin{aligned} \mathrm{U} &= u^2(1-\cos u)^2 + (1+m^2\mathrm{D})\left\{u^2(u-\sin u)^2 - 2u(u-\sin u)\mathrm{D} + \mathrm{D}^2\right\} \\ &= u^2(1-\cos u)^2 + u^2(u-\sin u)^2 - 2u(u-\sin u)\mathrm{D} + \mathrm{D}^2 \\ &\qquad + m^2\mathrm{D}\left[u(u-\sin u)-\mathrm{D}\right]^2 \\ &= \mathrm{D}\left\{u^2 - 2u(u-\sin u) + \mathrm{D} + m^2\left[u(u-\sin u)-\mathrm{D}\right]^2\right\} \\ &= \mathrm{D}\left\{u^2 - 2u^2 + 2u\sin u + u^2 - 2u\sin u + 2(1-\cos u)\right. \\ &\qquad \left. + m^2\left[u(u-\sin u)-\mathrm{D}\right]^2\right\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en réduisant, et tenant compte encore de la première égalité (192),

$$\begin{aligned} \mathrm{U} &= \mathrm{D}\left\{2(1-\cos u) + m^2\left[u\sin u - 2(1-\cos u)\right]^2\right\} \\ &= \mathrm{D}\left\{2(1-\cos u) + m^2\left[u^2\sin^2 u - 4u\sin u(1-\cos u) + 4(1-\cos u)^2\right]\right\} \\ &= \mathrm{D}\left[m^2u^2\sin^2 u + 2(1-\cos u)(1-2m^2u\sin u) + 4m^2(1-\cos u)^2\right]. \end{aligned}$$

Digitized by Google

De telle sorte qu'en reportant cette dernière valeur dans l'expression (197), et extrayant ensuite les racines, on trouvera pour l'élément de l'intégrale à calculer

$$\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\omega^2} = \frac{m}{1+m^2D}\sqrt{m^2u^2\sin^2u + 2(1-\cos u)(1-2m^2u\sin u) + 4m^2(1-\cos u)^2}\,du,$$

et finalement, en remettant dans cette dernière expression, à la place de D, sa dernière valeur (191), la formule (174$^{bis}$) nous donnera, pour la ligne géodésique cherchée, l'équation

$$(198)\quad \begin{cases} \arccos\dfrac{1}{Cr} = C' \\ \qquad + m\displaystyle\int \frac{\sqrt{m^2u^2\sin^2u + 2(1-\cos u)(1-2m^2u\sin u) + 4m^2(1-\cos u)^2}}{1+m^2\left[u^2 - 2u\sin u + 2(1-\cos u)\right]}\,du, \end{cases}$$

équation dans laquelle l'intégrale qui y figure, contenant simultanément $u$, $\sin u$, et $\cos u$, engagés à la fois sous un radical et dans une fraction rationnelle par rapport à ces quantités, représente une transcendante de l'ordre le plus compliqué, et ne pourra sans doute être évaluée qu'à l'aide des méthodes de quadrature approximative. Quoi qu'il en soit à cet égard, cette quadrature étant supposée effectuée par un procédé quelconque, on obtiendra ensuite l'équation de la ligne géodésique en coordonnées sphériques, en remettant dans l'équation (198) ainsi calculée, à la place de la variable auxiliaire $u$, sa valeur tirée de la seconde équation (189), savoir arc cos $\left(1 - \frac{1}{m}\tang\theta\sin\omega\right)$, ou mieux encore en coordonnées rectilignes, en y remplaçant simultanément $r$ et $u$ par leurs valeurs $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et arc cos $\frac{mz-y}{mz}$.

Application aux surfaces isothermes en général. — Cas particulier des surfaces du second ordre. — Avant d'aborder le problème relativement aux surfaces isothermes en général, nous étudierons d'abord le cas particulier le plus intéressant, en considérant les surfaces les plus simples et les plus fréquemment

Digitized by Google

employées qui ne rentrent pas dans les catégories déjà examinées, à savoir les surfaces du second ordre, auxquelles se rapporte la célèbre solution de Jacobi, dont nous avons déjà parlé.

VII° *Système des coordonnées elliptiques, ou système ellipsoïdal.* — (1° *Ellipsoïdes et hyperboloïdes.*) — Le système des coordonnées elliptiques, ou système ellipsoïdal, dont nous avons déjà fait usage dans le précédent paragraphe de ce travail, se compose, comme on l'a vu, de trois surfaces du second ordre appartenant aux genres ellipsoïde et hyperboloïdes, dont les équations ne diffèrent que par la dénomination du paramètre, et les limites entre lesquelles il est astreint à varier. Le calcul que nous allons présenter s'appliquera donc indifféremment aux trois familles de surfaces coordonnées, en y permutant successivement les trois variables $\lambda$, $\mu$, $\nu$, et les supposant d'ailleurs renfermées chacune entre les limites que nous avons définies au moyen des inégalités (93).

Supposons donc, pour fixer les idées, que nous cherchions les lignes géodésiques de l'ellipsoïde au paramètre $\nu$, astreint à varier entre les limites $-c^2$ et $+\infty$. Il suffira de faire, pour appliquer notre théorie, $\lambda = \varphi$, $\mu = \psi$, et $\nu = \varpi = const.$ Les expressions déjà considérées des quantités H, K, et J, qui sont avec cette notation (formules (98))

$$(199)\quad \left\{ \begin{array}{l} H = \Delta_1^{-2}\varphi = \dfrac{1}{4}\dfrac{\varphi - \varpi}{f(\varphi)}(\varphi - \psi), \qquad K = \Delta_1^{-2}\psi = \dfrac{1}{4}\dfrac{\psi - \varpi}{f(\psi)}(\psi - \varphi), \\ \qquad\qquad J = \Delta_1^{-2}\varpi = \dfrac{1}{4}\dfrac{(\varpi - \varphi)(\varpi - \psi)}{f(\varpi)}, \end{array} \right.$$

réalisent précisément les hypothèses du cas III, car elles coïncident avec les expressions (135) en faisant

$$(200)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_1(\varphi) = \varphi, & \Psi_1(\psi) = \psi, \\ \Phi_2(\varphi) = \dfrac{1}{4}\dfrac{\varphi - \varpi}{f(\varphi)}, & \Psi_2(\psi) = \dfrac{1}{4}\dfrac{\psi - \varpi}{f(\psi)}. \end{array} \right.$$

L'intégrale générale, qui est représentée par les deux équations

Digitized by Google

(136), consistera donc dans le cas actuel dans les deux solutions (en multipliant tous les termes par 2)

$$(201)\quad \begin{cases} \int \sqrt{\dfrac{\varphi-\varpi}{f(\varphi)(\varphi+C)}}\,d\varphi - \int \sqrt{\dfrac{\psi-\varpi}{f(\psi)(\psi+C)}}\,d\psi = C', \\ \int \sqrt{\dfrac{\varphi-\varpi}{f(\varphi)(\varphi+C)}}\,d\varphi + \int \sqrt{\dfrac{\psi-\varpi}{f(\psi)(\psi+C)}}\,d\psi = C'', \end{cases}$$

ou en remplaçant définitivement les variables $\varphi$ et $\psi$ par leurs valeurs conventionnelles relatives au cas actuel, ainsi que la fonction $f$ par son expression (96),

$$(202)\quad \begin{cases} \int \sqrt{\dfrac{\lambda-\nu}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)(C+\lambda)}}\,d\lambda \\ -\int \sqrt{\dfrac{\mu-\nu}{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)(C+\mu)}}\,d\mu = C', \\ \int \sqrt{\dfrac{\lambda-\nu}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)(C+\lambda)}}\,d\lambda \\ +\int \sqrt{\dfrac{\mu-\nu}{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)(C+\mu)}}\,d\mu = C'', \end{cases}$$

et l'on retrouve ainsi presque immédiatement la belle solution donnée pour la première fois relativement à l'ellipsoïde par l'illustre Jacobi dans la 28e leçon de ses *Vorlesungen über Dynamik* (page 214) (*).

Si l'on veut connaitre en même temps pour l'une ou l'autre de ces deux lignes (supposées réunies en une seule équation, la seconde, par exemple, en convenant que le second radical emporte avec lui son signe), l'expression de la longueur d'arc d'une part, et celle du rayon de courbure de l'autre, pour un point quelconque de ces lignes, notre seconde formule (137) nous

(*) Voir aussi les *Vorlesungen über Analytisch Geometrie* de HESSE, 23e leçon. (Troisième édition, page 331.)

Digitized by Google

donnera tout d'abord pour la longueur d'arc, en remplaçant encore $\varphi$, $\psi$, $\varpi$ par $\lambda$, $\mu$, $\nu$,

$$(203)\quad \left\{ s = \frac{1}{2}\left[ \int \sqrt{\frac{\lambda - \nu}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)(C+\lambda)}}\,\lambda d\lambda + \int \sqrt{\frac{\mu - \nu}{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)(C+\mu)}}\,\mu d\mu \right], \right.$$

expression qui concorde bien avec celle donnée par Jacobi (*loc. cit.*, page 214, *en bas*), eu égard à l'équation (202) de la courbe elle-même, ainsi que nous l'expliquons pour une question plus générale dans notre paragraphe premier (voir la note en petit texte, au bas de la page 76, ou encore la Note II de l'Appendice à la fin du Mémoire).

De même pour le rayon de courbure, les expressions (199) donnant

$$\left\{ \begin{array}{ll} lH = l\left(\frac{1}{4}\frac{\varphi-\psi}{f(\varphi)}\right) + l(\varphi - \varpi), & lK = l\left(\frac{1}{4}\frac{\psi-\varphi}{f(\psi)}\right) + l(\psi - \varpi), \\ \frac{lH}{\varpi} = \frac{-1}{\varphi-\varpi} = \frac{1}{\varpi-\varphi}, & \frac{lK}{\varpi} = \frac{-1}{\psi-\varpi} = \frac{1}{\varpi-\psi}, \\ \multicolumn{2}{c}{J^{-\frac{1}{2}} = 2\left[\frac{f(\varpi)}{(\varpi-\varphi)(\varpi-\psi)}\right]^{\frac{1}{2}},} \end{array} \right.$$

en remettant ces valeurs, supposées prises pour la valeur particulière du paramètre $\varpi$ qui convient à la surface donnée, ainsi que celles (200) de $\Phi_1$ et $\Psi_1$, dans notre formule (139), nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= -\frac{1}{\varphi-\psi}\left[\frac{f(\varpi)}{(\varpi-\varphi)(\varpi-\psi)}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\varphi+C}{\varpi-\varphi} - \frac{\psi+C}{\varpi-\psi}\right) \\ &= -\frac{1}{\varphi-\psi}\left[\frac{f(\varpi)}{(\varpi-\varphi)(\varpi-\psi)}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{(\varphi+C)(\varpi-\psi)-(\psi+C)(\varpi-\varphi)}{(\varpi-\varphi)(\varpi-\psi)} \\ &= -\frac{1}{\varphi-\psi}\frac{f(\varpi)^{\frac{1}{2}}}{\left[(\varpi-\varphi)(\varpi-\psi)\right]^{\frac{3}{2}}}(\varpi+C)(\varphi-\psi) \\ &= -\frac{f(\varpi)^{\frac{1}{2}}(\varpi+C)}{\left[(\varpi-\varphi)(\varpi-\psi)\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{(\varpi+C)\left[(a^2+\varpi)(b^2+\varpi)(c^2+\varpi)\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[(\varphi-\varpi)(\psi-\varpi)\right]^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

Digitized by Google

et par suite, en remettant de nouveau $\lambda$, $\mu$, $\nu$, à la place de $\varphi, \psi, \varpi$, nous aurons définitivement pour expression du rayon de courbure cherché

$$\rho = -\frac{\left[(\lambda-\nu)(\mu-\nu)\right]^{\frac{3}{2}}}{(\nu+C)\sqrt{(a^2+\nu)(b^2+\nu)(c^2+\nu)}}, \tag{204}$$

formule que ne donne pas Jacobi, et que nous n'avons rencontrée nulle part ailleurs.

En particulier pour l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

que l'on peut toujours supposer répondre à la valeur 0 du paramètre $\nu$, en prenant dans le système coordonné (94) pour les constantes $a$, $b$, $c$, précisément les demi-axes de la surface donnée, cette dernière expression prend alors la forme simple et remarquable

$$\rho = \frac{-(\lambda\mu)^{\frac{3}{2}}}{Cabc}. \tag{205}$$

(2° *Cône du second ordre.*) — La méthode que nous avons indiquée pour les surfaces coniques en général conduit, comme on l'a vu, pour le cône du second ordre, à un résultat assez compliqué; mais cette complication n'est pas inhérente à la nature même de la question, et tient simplement à l'emploi des coordonnées sphériques, à l'aide desquelles nous avons exprimé le résultat, et qui ne sont pas dans ce cas particulier les variables naturelles de la question. Aussi arrive-t-on à un résultat beaucoup plus simple en mettant à profit pour cet objet le système de coordonnées coniques $r$, $\lambda$, et $\mu$, défini par nos formules (107), que nous avons déduit comme cas limite du système des coordonnées elliptiques.

A cet effet, supposant comme dans la question traitée dans notre chapitre premier, que l'équation du cône donné ait été mise sous la forme

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0,$$

Digitized by Google

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant réels, et remplissant la condition $\alpha > \beta$, puis convenant de même d'attribuer aux constantes $a^2$, $b^2$, $c^2$, et $\mu$, les valeurs

$$(206) \qquad a^2 = \alpha^2, \qquad b^2 = \beta^2, \qquad c^2 = -\gamma^2, \qquad \mu = 0,$$

ainsi que nous l'avons fait à l'occasion du même problème, nous ferons pour appliquer notre méthode dans la question actuelle

$$\lambda = \varphi, \qquad r = \psi, \qquad \mu = \varpi;$$

et dès lors les expressions (108) nous donneront avec ces notations pour H, K, et J, les valeurs

$$(207) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \Delta_1^{-2}\lambda = \dfrac{\varpi - \varphi}{4f(\varphi)}\psi^2, \qquad K = \Delta_1^{-2} r = 1, \\ \\ J = \Delta_1^{-2}\mu = \dfrac{\varphi - \varpi}{4f(\varpi)}\psi^2, \end{array} \right.$$

lesquelles coïncident, comme on le voit, avec les expressions (132), en faisant

$$(208) \qquad F(\psi) = 1, \qquad \Phi(\varphi) = \frac{1}{4}\frac{\varpi - \varphi}{4f(\varphi)}, \qquad \Psi(\psi) = \psi^2.$$

La solution du problème, qui est avec ces hypothèses fournie par les équations (134), sera donc, en prenant ces mêmes valeurs pour la surface donnée, c'est-à-dire en y faisant $\varpi = 0$,

$$\int \frac{d\psi}{\psi\sqrt{C^2\psi^2 - 1}} - \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{-\varphi}{f(\varphi)}}\, d\varphi = C',$$

ou encore, en intégrant comme nous l'avons fait un peu plus haut à propos du cône de révolution (voir la formule de quadrature en note, page 137),

$$\arccos\frac{1}{C\psi} - \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{-\varphi}{f(\varphi)}}\, d\varphi = C',$$

Digitized by Google

car l'on verrait encore comme pour ce cas particulier que la seconde équation (134) ne fournirait pas une solution distincte de celle-ci. Si, enfin, nous remplaçons dans cette équation $\varphi$ et $\psi$ par leurs valeurs conventionnelles relatives à la question actuelle, ainsi que la fonction $f$ par son expression (96), nous aurons finalement pour équation de la ligne géodésique du cône donné

$$(209) \qquad \frac{1}{r} = C\cos\left(C' + \frac{1}{2}\int \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{-\lambda(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\right),$$

l'intégrale qui figure sous le signe somme étant une quantité réelle, attendu que, des quatre facteurs qui entrent sous le radical, deux sont négatifs, savoir $b^2+\lambda$ et $c^2+\lambda$, et les deux autres positifs, par suite des inégalités (93) et des hypothèses (206), qui donnent dans le cas actuel $-a^2<\lambda<-b^2<0<-c^2$.

Telle est donc la solution fort simple, à laquelle conduit pour ce cas l'emploi des coordonnées coniques $\lambda$, $\mu$, et $r$. On voit que l'intégrale qui y figure ne dépend que des fonctions elliptiques seulement, tandis que l'intégrale analogue que nous avons rencontrée, en employant les coordonnées sphériques, conformément à la méthode générale exposée dans le paragraphe précédent, dépendait, on s'en souvient, des fonctions hyperelliptiques.

Nous n'avons pas à rechercher l'expression de la longueur d'arc correspondant à un point quelconque de la ligne géodésique (209), du moment que nous avons obtenu cette même expression pour une surface conique quelconque, en fonction de la seule coordonnée $r$, que nous employons encore pour ce cas particulier du cône de second ordre; et il est facile de s'assurer, en effet, que notre première formule (141), qui correspond aux hypothèses (132), dont nous nous sommes servis pour le cas particulier que nous venons de traiter, reproduit bien, en y remettant à la place de F et de $\Psi$ leurs valeurs (208), l'expression (178) que nous avions établie pour le même objet dans le cas général.

Mais il n'en est pas de même à l'égard de l'expression du rayon de courbure de la même ligne, attendu que nous avions

Digitized by Google

obtenu l'expression (179), relative à cet élément dans le cas général, en fonction de la coordonnée sphérique θ, que nous n'avons pas conservée comme variable dans la question actuelle; il y a donc lieu de rechercher à nouveau cette même expression en fonction de la coordonnée conique λ, à l'aide de laquelle nous avons obtenu cette fois l'équation de la courbe.

A cet effet, tirant successivement des expressions (207)

$$lK = 0, \qquad lH = l\left(\frac{1}{4}\frac{\psi^2}{f(\varphi)}\right) + l(\varpi - \varphi), \qquad \frac{lH}{\varpi} = \frac{1}{\varpi - \varphi},$$

$$\Delta_1 \varpi = J^{-\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{f(\varpi)}{\varphi - \varpi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\psi},$$

puis prenant ces deux dernières valeurs pour la surface donnée, c'est-à-dire y faisant $\varpi = 0$, et les reportant toutes deux, ainsi que l'expression (208) de $\Psi(\psi)$, dans la seconde formule (141), nous aurons pour expression de la courbure demandée

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-1}{2C^2} \cdot \frac{2}{\psi} \sqrt{\frac{f(0)}{\varphi}} \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{1}{-\varphi}\right) = C\left(\frac{1}{Cr}\right)^3 \frac{\sqrt{f(0)}}{\varphi^{\frac{5}{2}}},$$

ou, en remplaçant $f(0)$ par sa valeur, qui résulte de la définition (96) de la fonction $f$ et de nos hypothèses (206), savoir $f(0) = \sqrt{a^2b^2c^2} = \sqrt{-\alpha^2\beta^2\gamma^2}$, et en même temps $\frac{1}{Cr}$ par sa valeur tirée de l'équation de la courbe (209), nous aurons

$$\frac{1}{\rho} = \frac{C\alpha\beta\gamma}{\lambda\sqrt{-\lambda}} \cos^3\left(C' + \frac{1}{2}\int \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{-\lambda(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\right).$$

(3° *Paraboloïdes.*)— La méthode la plus naturelle, pour traiter ce problème indépendamment de ceux que nous avons déjà résolus, consisterait à faire usage dans ce but du système de coordonnées défini par nos formules (116$^{bis}$), ou (117$^{bis}$) et (118), de notre second chapitre, mais nous préférons, à titre d'exemple d'application de notre méthode pour le cas où la surface donnée

Digitized by Google

n'est pas supposée rattachée à un système triple orthogonal, et en même temps comme vérification de nos formules plus générales données en vue de ce cas, résoudre le même problème à l'aide de ces formules pour l'un des deux paraboloïdes

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{210}$$

en sorte que nous aurons ainsi épuisé dans notre revue, en ce qui concerne les lignes géodésiques, la série complète des surfaces du second ordre.

Pour cela, il nous faudra tout d'abord remplacer cette équation unique par trois équations de la forme (36), $\varphi$ et $\psi$ désignant par hypothèse les paramètres correspondant à chacun des deux systèmes de lignes de courbure. A cet effet, les trois formules de droite (97) nous donnant immédiatement les trois équations analogues relatives à la surface

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{211}$$

qui correspond à la valeur 0 du paramètre $\varpi$, lesquelles sont par suite, étant prises pour la même valeur $\varpi = 0$,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{(a^2+\varphi)(a^2+\psi)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \qquad \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{(b^2+\varphi)(b^2+\psi)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ \qquad\qquad \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{(c^2+\varphi)(c^2+\psi)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}, \end{array}\right. \tag{212}$$

et la surface proposée (210) pouvant être considérée, ainsi qu'on le sait, comme la limite de la surface (211) dont on ferait grandir l'axe $c$ jusqu'à l'infini (*), après avoir transporté et fixé à l'origine

(*) Il est indispensable de supposer à l'avance à cet effet les trois constantes données $a^2$, $b^2$, $c^2$, et les trois coordonnées $\lambda$, $\mu$, $\nu$, rangées par grandeurs dans un ordre précisément inverse de celui marqué par les inégalités de définition (93), hypothèse nouvelle qui n'altère en rien la réalité des valeurs de $x$, $y$, $z$ fournies par les équations (94) (colonne de droite), qui sont les seules que nous empruntions à la théorie antérieurement exposée du système ellipsoïdal, comme point de départ du calcul actuel.

Digitized by Google

des coordonnées l'un des sommets correspondants, il est clair que nous obtiendrons les équations demandées, en introduisant les mêmes hypothèses dans les trois équations (212).

En effet, remplaçant dans l'équation (211), en premier lieu $z$ par $z-c$, et $a^2$, $b^2$ respectivement par $cp$ et $cq$, cette surface deviendra, en réduisant

$$\frac{x^2}{cp}+\frac{y^2}{cq}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{2z}{c}=0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z-\frac{z^2}{c},$$

et, en faisant ensuite $c=\infty$, on voit qu'elle se réduit bien à l'équation proposée (210). Si l'on opère les mêmes substitutions dans les équations (212), et qu'en même temps on y change $\varphi$ en $c\varphi$, et $\psi$ en $c\psi$, on trouvera de même d'abord

$$\frac{x^2}{cp}=\frac{(p+\varphi)(p+\psi)}{(p-q)(p-c)}, \qquad \frac{y^2}{cq}=\frac{(q+\varphi)(q+\psi)}{(q-c)(q-p)},$$

$$\left(\frac{z}{c}-1\right)^2=\frac{(c+\varphi)(c+\psi)}{(c-p)(c-q)},$$

ou encore

$$\frac{x^2}{p}=\frac{(p+\varphi)(p+\psi)}{(p-q)\left(\frac{p}{c}-1\right)}, \qquad \frac{y^2}{q}=\frac{(q+\varphi)(q+\psi)}{\left(\frac{q}{c}-1\right)(q-p)},$$

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{2z}{c}=\frac{(c+\varphi)(c+\psi)}{(c-p)(c-q)}-1=\frac{c^2+(\varphi+\psi)c+\varphi\psi-\left[c^2-(p+q)c+pq\right]}{c^2-(p+q)c+pq}$$

$$=\frac{c\left[\varphi+\psi+p+q+\frac{\varphi\psi-pq}{c}\right]}{c^2\left[1-\frac{p+q}{c}+\frac{pq}{c^2}\right]},$$

et faisant ensuite $c=\infty$, après avoir multiplié toutefois la dernière équation par $c$, il restera simplement

$$\frac{x^2}{p}=\frac{(p+\varphi)(p+\psi)}{-(p-q)}, \qquad \frac{y^2}{q}=\frac{(q+\varphi)(q+\psi)}{-(q-p)}, \qquad -2z=\varphi+\psi+p+q,$$



Digitized by Google

d'où l'on tirera définitivement en résolvant

$$(213)\quad \begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{p}{q-p}}\sqrt{(p+\varphi)(p+\psi)}, \qquad y=\sqrt{\dfrac{q}{p-q}}\sqrt{(q+\varphi)(q+\psi)}, \\ z=-\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi+p+q). \end{cases}$$

Ces trois équations représentant dans le cas actuel les trois équations (36) de la surface rapportée à ses lignes de courbure, et donnant par la différentiation

$$(214)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\varphi}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{p}{q-p}}\sqrt{\dfrac{p+\psi}{p+\varphi}}, & \dfrac{dy}{d\varphi}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{q}{p-q}}\sqrt{\dfrac{q+\psi}{q+\varphi}}, & \dfrac{dz}{d\varphi}=-\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{dx}{d\psi}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{p}{q-p}}\sqrt{\dfrac{p+\varphi}{p+\psi}}, & \dfrac{dy}{d\psi}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{q}{p-q}}\sqrt{\dfrac{q+\varphi}{q+\psi}}, & \dfrac{dz}{d\psi}=-\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

nous en concluerons pour la valeur de H, par les formules (37),

$$\mathrm{H}=\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2=\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2=\frac{1}{4(q-p)}\left[\frac{p(p+\psi)}{p+\varphi}-\frac{q(q+\psi)}{q+\varphi}+q-p\right]$$

$$=\frac{1}{4(q-p)}\left[q\left(1-\frac{q+\psi}{q+\varphi}\right)-p\left(1-\frac{p+\psi}{p+\varphi}\right)\right]=\frac{1}{4}\frac{\varphi-\psi}{q-p}\left(\frac{q}{q+\varphi}-\frac{p}{p+\varphi}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\varphi-\psi}{q-p}\frac{q(p+\varphi)-p(q+\varphi)}{(p+\varphi)(q+\varphi)}=\frac{1}{4}\frac{\varphi-\psi}{q-p}\frac{\varphi(q-p)}{(p+\varphi)(q+\varphi)},$$

et la valeur de K se déduisant évidemment de celle de H, en permutant simplement $\varphi$ et $\psi$, nous aurons, en réduisant, les deux valeurs

$$(215)\quad \mathrm{H}=\frac{1}{4}\frac{\varphi}{(p+\varphi)(q+\varphi)}(\varphi-\psi), \qquad \mathrm{K}=\frac{1}{4}\frac{\psi}{(p+\psi)(q+\psi)}(\psi-\varphi),$$

lesquelles présentent bien encore la forme requise pour l'application de la méthode, et coïncideront avec les expressions (135) en faisant

$$(216)\quad \begin{cases} \Phi_1(\varphi)=\varphi, & \Psi_1(\psi)=\psi, \\ \Phi_2(\varphi)=\dfrac{1}{4}\dfrac{\varphi}{(p+\varphi)(q+\varphi)}, & \Psi_2(\psi)=\dfrac{1}{4}\dfrac{\psi}{(p+\psi)(q+\psi)}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Les formules (137) nous donneront dès lors pour équation de la ligne géodésique, et en même temps pour expression de la longueur d'arc correspondant à un point quelconque (en écrivant encore C au lieu de $C_1$ et $\frac{1}{2}C'$ au lieu de $C_1'$), (*)

$$(217)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi(p+\varphi)(q+\varphi)(C+\varphi)}} \pm \int \frac{\psi d\psi}{\sqrt{\psi(p+\psi)(q+\psi)(C+\psi)}} = C', \\ \displaystyle s = \frac{1}{2}\left[\int \frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{\varphi(p+\varphi)(q+\varphi)(C+\varphi)}} \pm \int \frac{\psi^2 d\psi}{\sqrt{\psi(p+\psi)(q+\psi)(C+\psi)}}\right], \end{cases}$$

double solution qui ne dépend encore, comme pour le cône, que des fonctions elliptiques seulement.

Pour avoir en outre le rayon de courbure de cette ligne, ayant obtenu d'abord par une simple combinaison des valeurs (214)

$$\begin{cases} \dfrac{y}{\varphi}\dfrac{z}{\psi} - \dfrac{z}{\varphi}\dfrac{y}{\psi} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{q}{p-q}}\left(\sqrt{\dfrac{q+\psi}{q+\varphi}} - \sqrt{\dfrac{q+\varphi}{q+\psi}}\right) \\ \qquad = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{q}{p-q}}\,\dfrac{\varphi-\psi}{\sqrt{(q+\varphi)(q+\psi)}}, \\ \dfrac{z}{\varphi}\dfrac{x}{\psi} - \dfrac{x}{\varphi}\dfrac{z}{\psi} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{p}{q-p}}\left(\sqrt{\dfrac{p+\varphi}{p+\psi}} - \sqrt{\dfrac{p+\psi}{p+\varphi}}\right) \\ \qquad = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{p}{q-p}}\,\dfrac{\psi-\varphi}{\sqrt{(p+\varphi)(p+\psi)}}, \end{cases}$$

puis ayant tiré ensuite des mêmes valeurs par la différentiation

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{d\varphi^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{p(p+\psi)}{q-p}}\left(-\dfrac{1}{2}\right)(p+\varphi)^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{p}{q-p}}\sqrt{\dfrac{p+\psi}{p+\varphi}}\,\dfrac{1}{p+\varphi}, \\ \dfrac{d^2y}{d\varphi^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{q(q+\psi)}{p-q}}\left(-\dfrac{1}{2}\right)(q+\varphi)^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{q}{p-q}}\sqrt{\dfrac{q+\psi}{q+\varphi}}\,\dfrac{1}{q+\varphi}, \end{cases}$$

(*) Ces deux résultats ont déjà été donnés par M. MINDING (*Journal de Crelle*, t. XX, 1840, p. 327, *in medio*), lequel les déduit immédiatement de ceux de Jacobi, relatifs à l'ellipsoïde, ainsi que nous l'indiquons, d'après lui, un peu plus loin.

Digitized by Google

nous déduirons de ces deux dernières séries d'égalités l'expression

$$\left(\frac{y}{\varphi}\frac{z}{\psi}-\frac{z}{\varphi}\frac{y}{\psi}\right)\frac{x^2}{\varphi^2}+\left(\frac{z}{\varphi}\frac{x}{\psi}-\frac{x}{\varphi}\frac{z}{\psi}\right)\frac{y^2}{\varphi^2}$$

$$=-\frac{1}{4^2}\sqrt{\frac{p}{q-p}}\sqrt{\frac{q}{p-q}}\left[\sqrt{\frac{p+\psi}{p+\varphi}}\frac{1}{p+\varphi}\frac{\varphi-\psi}{\sqrt{(q+\varphi)(q+\psi)}}\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{q+\psi}{q+\varphi}}\frac{1}{q+\varphi}\frac{\psi-\varphi}{\sqrt{(p+\varphi)(p+\psi)}}\right]$$

$$=-\frac{1}{4^2}\sqrt{\frac{-pq}{(p-q)^2}}\frac{\varphi-\psi}{\sqrt{(p+\varphi)(q+\varphi)}}\frac{(q+\varphi)(p+\psi)-(q+\psi)(p+\varphi)}{(p+\varphi)(q+\varphi)\sqrt{(p+\psi)(q+\psi)}}$$

$$=-\frac{1}{4^2}\frac{\sqrt{-pq}}{p-q}\frac{\varphi-\psi}{\left[(p+\varphi)(q+\varphi)\right]^{\frac{3}{2}}}\frac{(p-q)(\varphi-\psi)}{\sqrt{(p+\psi)(q+\psi)}}$$

$$=\frac{\sqrt{-pq}}{4^2}\frac{(\varphi-\psi)^2}{\left[(p+\varphi)(q+\varphi)\right]^{\frac{3}{2}}\sqrt{(p+\psi)(q+\psi)}}.$$

Or, d'autre part les expressions (215) de H et K nous donnant

$$HK=\frac{1}{4^2}\frac{-\varphi\psi(\varphi-\psi)^2}{(p+\varphi)(q+\varphi)(p+\psi)(q+\psi)},$$

$$(HK)^{-\frac{1}{2}}=\frac{4\sqrt{(p+\varphi)(q+\varphi)(p+\psi)(q+\psi)}}{(\varphi-\psi)\sqrt{-\varphi\psi}},$$

nous conclurons par le moyen des formules (41), à l'aide des résultats que nous venons de calculer, et des valeurs $\frac{z^2}{\varphi^2}=0$, $\frac{z^2}{\psi^2}=0$, que donne immédiatement l'expression (213) de $z$, pour les quantités que nous avons appelées A et B, les expressions

$$A=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{pq}{\varphi\psi}}\frac{\varphi-\psi}{(p+\varphi)(q+\varphi)},\qquad B=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{pq}{\varphi\psi}}\frac{\psi-\varphi}{(p+\psi)(q+\psi)},$$

la seconde se déduisant évidemment de la première par la simple

Digitized by Google

permutation des lettres $\varphi$ et $\psi$; puis, comme les mêmes valeurs (215) de H et K donnent pour leurs inverses

$$\frac{1}{H} = 4\frac{(p+\varphi)(q+\varphi)}{\varphi(\varphi-\psi)}, \qquad \frac{1}{K} = 4\frac{(p+\psi)(q+\psi)}{\psi(\psi-\varphi)},$$

nous aurons par les égalités (45), à l'aide des valeurs que nous venons d'obtenir, pour les deux courbures principales de la surface,

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{H}A = \frac{\sqrt{pq}}{\varphi\sqrt{\varphi\psi}}, \qquad \frac{1}{R''} = \frac{1}{K}B = \frac{\sqrt{pq}}{\psi\sqrt{\varphi\psi}},$$

et dès lors en reportant ces dernières valeurs, ainsi que celles (216) de $\Phi_1$ et $\Psi_1$ dans notre formule générale (138), nous aurons définitivement pour l'expression de la courbure cherchée

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\varphi-\psi}\sqrt{\frac{pq}{\varphi\psi}}\left[\frac{1}{\varphi}(\varphi+C) - \frac{1}{\psi}(\psi+C)\right] = \frac{C}{\varphi-\psi}\sqrt{\frac{pq}{\varphi\psi}}\left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\psi}\right) = \frac{C\sqrt{pq}}{(\varphi\psi)^{\frac{3}{2}}},$$

et pour celle du rayon de courbure lui-même

$$\rho = \frac{(\varphi\psi)^{\frac{3}{2}}}{C\sqrt{pq}}. \tag{218}$$

Si notre but, en développant les calculs qui précèdent, n'eût été, avant tout, de fournir un exemple simple de l'application littérale de la méthode exposée dans notre premier paragraphe, dont nous n'avions pas encore fait usage jusqu'ici, nous eussions pu arriver beaucoup plus rapidement aux mêmes résultats, en effectuant directement sur ceux déjà rencontrés pour la surface (211), c'est-à-dire dans les formules (202), (203), et (204), les mêmes transformations qui pour $c = \infty$ nous ont donné la surface proposée (210), ou, plus exactement, celles qui nous ont conduit des équations (212) aux équations correspondantes pour la surface donnée (213).

En effet, faisant d'abord dans ces résultats $\nu = \varpi = 0$, pour

Digitized by Google

les adapter à la surface (211), puis y changeant encore $a^2$, $b^2$ en $cp$, $cq$ ; $\lambda$, $\mu$, en $c\varphi$, $c\psi$ ; et en outre C en Cc, et $\mathfrak{C}'$ en $\frac{C'}{c}$, on voit aisément qu'elles pourront s'écrire

$$\left\{\begin{aligned}
&\int\sqrt{\frac{\varphi}{(p+\varphi)(q+\varphi)\left(1+\frac{\varphi}{c}\right)(C+\varphi)}}\,d\varphi \\
&+\int\sqrt{\frac{\psi}{(p+\psi)(q+\psi)\left(1+\frac{\psi}{c}\right)(C+\psi)}}\,d\psi = C', \\
s=\frac{1}{2}&\left[\int\sqrt{\frac{\varphi}{(p+\varphi)(q+\varphi)\left(1+\frac{\varphi}{c}\right)(C+\varphi)}}\,\varphi d\varphi\right. \\
&\left.+\int\sqrt{\frac{\psi}{(p+\psi)(q+\psi)\left(1+\frac{\psi}{c}\right)(C+\psi)}}\,\psi d\psi\right], \\
\rho=\frac{(c^2\varphi\psi)^{\frac{3}{2}}}{Cc.c\sqrt{pq}.c}&=\frac{c^3(\varphi\psi)^{\frac{3}{2}}}{C\sqrt{pq}.c^3}=\frac{(\varphi\psi)^{\frac{3}{2}}}{C\sqrt{pq}};
\end{aligned}\right.$$

et dès lors, en faisant dans ces résultats ainsi transformés $c=\infty$, il est visible que nous obtiendrons ainsi immédiatement pour la surface donnée (210) les mêmes formules (217) et (218), auxquelles nous a conduits l'application pas à pas de notre méthode, qui trouve par là dans cette coïncidence une vérification aussi complète qu'on peut le demander.

VIII° *Système de coordonnées isothermes en général.* (*Surfaces quelconques, susceptibles de faire partie d'un système orthogonal triplement isotherme*). — Le succès de la méthode que nous avons exposée, pour les différents systèmes de coordonnées successivement examinés jusqu'ici, tient pour la plupart à ce seul fait que ces divers systèmes étaient composés exclusivement de surfaces isothermes. Il nous reste donc à établir en quelques

Digitized by Google

mots en terminant, comme résumé et couronnement de cette étude, le résultat plus général qui comprend presque tous les précédents, à savoir la solution du même problème pour un système de coordonnées quelconques, composé de trois familles de surfaces isothermes.

Pour cela nous n'avons qu'à rappeler cette proposition formulée par Lamé, à savoir que, pour un pareil système de coordonnées, si l'on suppose les trois surfaces *rapportées à leur paramètre thermométrique* (*), les trois quantités que nous avons appelées H, K, J, ne dépendent que de trois fonctions d'une seule variable $\Phi(\varphi)$, $\Psi(\psi)$, $\Pi(\varpi)$, et que leur expression est nécessairement de la forme (**)

$$(219)\quad \begin{cases} H = \Delta_1^{-2}\gamma = \alpha\Big(\Pi(\varpi) - \Phi(\gamma)\Big)\Big(\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)\Big), \\ K = \Delta_1^{-2}\gamma = \beta\Big(\Phi(\gamma) - \Psi(\psi)\Big)\Big(\Psi(\psi) - \Pi(\varpi)\Big), \\ J = \Delta_1^{-2}\varpi = \gamma\Big(\Psi(\psi) - \Pi(\varpi)\Big)\Big(\Pi(\varpi) - \Phi(\gamma)\Big), \end{cases}$$

---

(*) Pour la définition de cette expression, empruntée à Lamé, voir, dans le cas où on l'ignorerait, LAMÉ, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § XXI (page 31), ou encore notre *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces*, § IV (pages 88, *in fine*, et 89).

(**) Après avoir établi les six équations aux dérivées partielles du second ordre auxquelles doivent satisfaire les paramètres différentiels $\Delta_1$ des trois surfaces $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$ composant un système orthogonal (ou plus exactement leurs inverses), et limitant la question à la recherche d'un système triplement isotherme, Lamé est amené à substituer comme inconnues aux trois paramètres $\Delta_1$ les trois quantités

$$Q^2 = \frac{\Delta_1\rho}{\Delta_1\rho_1\Delta_1\rho_2}, \qquad Q_1^2 = \frac{\Delta_1\rho_1}{\Delta_1\rho_2\Delta_1\rho}, \qquad Q_2^2 = \frac{\Delta_1\rho_2}{\Delta_1\rho\Delta_1\rho_1},$$

lesquelles donnent, étant multipliées deux à deux,

$$(\alpha)\qquad \Delta_1^{-2}\rho = Q_1^2Q_2^2, \qquad \Delta_1^{-2}\rho_1 = Q_2^2Q^2, \qquad \Delta_1^{-2}\rho_2 = Q^2Q_1^2,$$

puis il montre que ces trois quantités doivent satisfaire en particulier tout d'abord aux trois conditions

$$\frac{d.Q^2}{d\rho} = 0, \qquad \frac{d.Q_1^2}{d\rho_1} = 0, \qquad \frac{d.Q_2^2}{d\rho_2} = 0,$$

Digitized by Google

expressions dans lesquelles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ désignant trois constantes, les trois fonctions $\Phi$, $\Psi$, et $\Pi$, sont assujetties à vérifier simultanément trois équations aux dérivées partielles, ou, plus simplement, à vérifier isolément trois équations différentielles ordinaires, puisqu'elles ne renferment chacune qu'une seule variable. Nous nous proposons, il est vrai, de revenir sur cette démonstration pour l'établir à nouveau, à l'aide de nos méthodes, d'une façon plus complète et plus satisfaisante, mais, en attendant, l'autorité de Lamé est assez grande dans ces questions pour que nous ayons le droit de considérer comme acquis ce résultat formulé par lui, et de nous en servir pour achever l'étude que nous avons entreprise.

Étant donc donné une surface quelconque, susceptible de faire partie d'un système orthogonal triplement isotherme, et dont on propose de trouver les lignes géodésiques, nous la considérerons comme la surface particulière, répondant à la valeur $\varpi_0$ du para-

---

qui expriment l'isothermie de chacune des trois surfaces, et en outre aux trois équations simultanées du premier ordre

$$(\beta)\quad \begin{cases} Q^2\dfrac{d.Q_2^2}{d\rho_1}\dfrac{d\ Q_1^2}{d\rho_2} = Q_1^2\dfrac{d.Q_2^2}{d\rho_1}\dfrac{d.Q^2}{d\rho_2} + Q_2^2\dfrac{d.Q_1^2}{d\rho_2}\dfrac{d.Q^2}{d\rho_1}, \\ Q_1^2\dfrac{d.Q^2}{d\rho_2}\dfrac{d.Q_2^2}{d\rho} = Q_2^2\dfrac{d.Q^2}{d\rho_2}\dfrac{d.Q_1^2}{d\rho} + Q^2\dfrac{d.Q_2^2}{d\rho}\dfrac{d\ Q_1^2}{d\rho_2}, \\ Q_2^2\dfrac{d.Q_1^2}{d\rho}\dfrac{d.Q^2}{d\rho_1} = Q^2\dfrac{d.Q_1^2}{d\rho}\dfrac{d.Q_2^2}{d\rho_1} + Q_1^2\dfrac{d.Q^2}{d\rho_1}\dfrac{d.Q_2^2}{d\rho}. \end{cases}$$

Cela fait, il en pose d'emblée, comme par une sorte de divination, la solution suivante

$$(\gamma)\qquad Q^2 = A_2^2 - A_1^2, \qquad Q_1^2 = A_2^2 - A^2, \qquad Q_2^2 = A_1^2 - A^2,$$

A n'étant fonction que de $\rho$ seule, $A_1$ que de $\rho_1$ et $A_2$ que de $\rho_2$; puis il ajoute quelques lignes plus bas : « J'ai démontré, depuis, que les valeurs (qui précèdent) des $Q^2$, sont les intégrales *les plus générales* du groupe des trois équations aux différences partielles (ci-dessus ($\beta$)), qu'elles vérifient. » (*Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § LVI, pages 99 et 100.)

Nous avouons ne pas savoir où se trouve cette démonstration, et, par conséquent, n'avoir pu la contrôler; mais tenant cette affirmation pour bonne et véritable sur la foi du nom illustre de Lamé, si nous reportons les valeurs ($\gamma$) des $Q^2$ dans les expressions ($\alpha$), et que nous écrivions, pour revenir à nos notations, $\Phi$ ($z$) à la place de $A^2$, $\Psi$ ($\psi$) à la place de $A_1^2$, et $\Pi$ ($\varpi$) au lieu de $A_2^2$, nous obtiendrons pour nos trois quantités H, K, J, précisément les valeurs (219) que nous indiquons ci-dessus, dans lesquelles on aurait fait : $-\alpha = \beta = -\gamma = 1$.

Digitized by Google

mètre, d'une certaine famille isotherme au paramètre $\varpi$, puis nous supposerons que l'on ait déterminé les deux autres familles isothermes aux paramètres $\varphi$ et $\psi$, formant avec elles un système triple orthogonal. Enfin nous supposerons que l'on ait déterminé les trois fonctions $\Phi$, $\Psi$, $\Pi$, qui permettent d'écrire les valeurs des quantités H, K, J, sous les formes (219). On voit dès lors que, pour la surface $\varpi_0$ qui nous intéresse, les deux quantités H et K auront pour valeurs

$$H=\alpha\Big(\Pi(\varpi_0)-\Phi(\varphi)\Big)\Big(\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)\Big), \qquad K=\beta\Big(\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)\Big)\Big(\Psi(\psi)-\Pi(\varpi_0)\Big),$$

lesquelles coïncideront avec les expressions (135), en prenant

$$(220)\quad \begin{cases} \Phi_1(\varphi)=\Phi(\varphi), & \Psi_1(\psi)=\Psi(\psi), \\ \Phi_2(\varphi)=\alpha\Big[\Pi(\varpi_0)-\Phi(\varphi)\Big], & \Psi_2(\psi)=\beta\Big[\Pi(\varpi_0)-\Psi(\psi)\Big] \end{cases}$$

et dès lors la solution générale du problème fournie par les équations (139) consistera dans les deux équations suivantes

$$(221)\quad \begin{cases} \sqrt{-\alpha}\int\sqrt{\dfrac{\Phi(\varphi)-\Pi(\varpi_0)}{\Phi(\varphi)+C}}\,d\varphi-\sqrt{\beta}\int\sqrt{\dfrac{-\Psi(\psi)+\Pi(\varpi_0)}{\Psi(\psi)+C}}\,d\psi=C', \\ \sqrt{-\alpha}\int\sqrt{\dfrac{\Phi(\varphi)-\Pi(\varpi_0)}{\Phi(\varphi)+C}}\,d\varphi+\sqrt{\beta}\int\sqrt{\dfrac{-\Psi(\psi)+\Pi(\varpi_0)}{\Psi(\psi)+C}}\,d\psi=C'', \end{cases}$$

lesquelles détermineront ainsi en général deux lignes répondant à la question entre deux points donnés sur la même surface.

Si l'on demande enfin, pour ce cas le plus général, les expressions de l'arc et du rayon de courbure relatives à un point quelconque de ces lignes (supposées encore réunies sous la seconde équation (221), en considérant le second radical comme susceptible du double signe), notre seconde formule (137) nous donnera immédiatement pour la longueur de l'arc, d'une part

$$s=\sqrt{-\alpha}\int\sqrt{\frac{\Phi(\varphi)-\Pi(\varpi_0)}{\Phi(\varphi)+C}}\,\Phi(\varphi)d\varphi+\sqrt{\beta}\int\sqrt{\frac{-\Psi(\psi)+\Pi(\varpi_0)}{\Psi(\psi)+C}}\,\Psi(\psi)d\psi;$$

Digitized by Google

puis, pour le rayon de courbure, tirant des expressions (219)

$$\left\{\begin{aligned} lH &= l\left[\alpha\left(\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)\right)\right]+l\left(\Pi(\varpi)-\Phi(\varphi)\right),\\ lK &= l\left[\beta\left(\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)\right)\right]+l\left(\Psi(\psi)-\Pi(\varpi)\right),\\ J^{-\frac{1}{2}} &= \left[\gamma\left(\Psi(\psi)-\Pi(\varpi)\right)\left(\Pi(\varpi)-\Phi(\varphi)\right)\right]^{-\frac{1}{2}},\end{aligned}\right.$$

et déduisant des deux premières expressions par la différentiation

$$\frac{lH}{\varpi}=\frac{\Pi'(\varpi)}{\Pi(\varpi)-\Phi(\varphi)},\qquad \frac{lK}{\varpi}=\frac{-\Pi'(\varpi)}{\Psi(\psi)-\Pi(\varpi)},$$

puis prenant ces valeurs, ainsi que celle qui précède de $J^{-\frac{1}{2}}$ pour la surface donnée, c'est-à-dire y faisant $\varpi=0$, et les substituant alors, en même temps que celles (220) de $\Phi_1$ et $\Psi_1$, dans notre formule générale (139), nous aurons pour expression de la courbure cherchée

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}&=-\frac{1}{2}\frac{\left[\gamma\left(\Psi(\psi)-\Pi(\varpi_0)\right)\left(\Pi(\varpi_0)-\Phi(\varphi)\right)\right]^{-\frac{1}{2}}}{\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)}\left[\frac{\Pi'(\varpi_0)}{\Pi(\varpi_0)-\Phi(\varphi)}\left(\Phi(\varphi)+C\right)+\frac{\Pi'(\varpi_0)}{\Psi(\psi)-\Pi(\varpi_0)}\left(\Psi(\psi)+C\right)\right]\\ &=\frac{-1}{2\sqrt{\gamma}}\frac{\Pi'(\varpi_0)}{\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)}\frac{\left(\Phi(\varphi)+C\right)\left(\Psi(\psi)-\Pi(\varpi_0)\right)+\left(\Psi(\psi)+C\right)\left(\Pi(\varpi_0)-\Phi(\varphi)\right)}{\left[\left(\Pi(\varpi_0)-\Phi(\varphi)\right)\left(\Psi(\psi)-\Pi(\varpi_0)\right)\right]^{\frac{3}{2}}}\\ &=\frac{-1}{2\sqrt{\gamma}}\frac{\Pi'(\omega_0)}{\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)}\frac{\left(\Pi(\varpi_0)+C\right)\left(\Psi(\psi)-\Phi(\varphi)\right)}{\left[\left(\Pi(\varpi_0)-\Phi(\varphi)\right)\left(\Psi(\psi)-\Pi(\varpi_0)\right)\right]^{\frac{3}{2}}},\end{aligned}$$

et nous en tirerons définitivement, en simplifiant, pour le rayon demandé lui-même l'une ou l'autre des deux formes

$$\rho=2\sqrt{-\gamma}\frac{\left[\left(\Pi(\varpi_0)-\Phi(\varphi)\right)\left(\Pi(\varpi_0)-\Psi(\psi)\right)\right]^{\frac{3}{2}}}{\Pi'(\varpi_0)\left(\Pi(\varpi_0)+C\right)}=\frac{2}{\gamma}\frac{J_0^{\frac{3}{2}}}{\Pi'(\varpi_0)\left(\Pi(\varpi_0)+C\right)},\qquad (*)$$

(*) Nous faisons passer le signe — devant la constante $\gamma$ sous le radical carré, afin de mettre en évidence la réalité de chaque facteur, pour le cas où l'on attribue, avec Lamé,

Digitized by Google

Si les coordonnées $\varphi$, $\psi$, $\varpi$, que l'on emploie, ne sont pas les coordonnées thermométriques elles-mêmes, c'est-à-dire si l'on ne suppose pas les trois surfaces qui composent le système triplement isotherme, rapportées toutes trois à leur paramètre thermométrique, elles pourront toujours être considérées comme des fonctions parfaitement déterminées de ces coordonnées, que nous désignerons pour un instant par $\varphi'$, $\psi'$, $\varpi'$, et réciproquement, de telle sorte que l'on aura :

$$(222)\quad \begin{cases} \varphi' = f_1(\varphi), & \psi' = f_2(\psi), & \varpi' = f_3(\varpi), \\ d\varphi' = f_1'(\varphi)d\varphi, & d\psi' = f_2'(\varphi)d\psi, & d\varpi' = f_3'(\varpi)d\varpi. \end{cases}$$

Cela posé, si l'on désigne de même par H', K', J' les trois quantités H, K, J, relatives à ce système de coordonnées, de l'égalité des deux expressions de l'élément d'arc

$$ds^2 = \mathrm{H}d\varphi^2 + \mathrm{K}d\psi^2 + \mathrm{J}d\varpi^2 = \mathrm{H}'d\varphi'^2 + \mathrm{K}'d\psi'^2 + \mathrm{J}'d\varpi'^2$$
$$= \mathrm{H}'.f_1'(\varphi)^2 d\varphi^2 + \mathrm{K}'.f_2'(\psi)^2 d\psi^2 + \mathrm{J}'.f_3'(\varpi)^2 d\varpi^2,$$

on conclura

$$(223)\qquad \mathrm{H} = \mathrm{H}'f_1'(\varphi)^2, \qquad \mathrm{K} = \mathrm{K}'f_2'(\psi)^2, \qquad \mathrm{J} = \mathrm{J}'f_3'(\varpi)^2.$$

Or, ayant, d'après les équations (219), pour les deux quantités H' et K' relatives aux coordonnées thermométriques, deux expressions de la forme

$$\begin{cases} \mathrm{H}' = \alpha\big[\Pi(\varpi') - \Phi(\varphi')\big]\big[\Phi(\varphi') - \Psi(\psi')\big], \\ \mathrm{K}' = \beta\big[\Phi(\varphi') - \Psi(\psi')\big]\big[\Psi(\psi') - \Pi(\varpi')\big], \end{cases}$$

---

à la constante $\gamma$ la valeur $-1$. La seconde forme de l'expression montre que l'on aura bien d'ailleurs, dans tous les cas, pour $\rho$ une valeur réelle, J étant par définition essentiellement positif, et par suite les deux facteurs qui entrent à la puissance $\frac{3}{2}$ dans la première expression sont nécessairement de même signe.

Digitized by Google

qui, exprimées à l'aide des coordonnées $\varphi$, $\psi$, $\varpi$, par la substitution des expressions (222), deviendraient

$$\begin{cases} H' = \alpha\big[\Pi_1(\varpi) - \Phi_1(\varphi)\big]\big[\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)\big], \\ K' = \beta\big[\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)\big]\big[\Psi_1(\psi) - \Pi_1(\varpi)\big], \end{cases}$$

on voit, en reportant ces dernières expressions dans les deux premières (223), qu'en y faisant ensuite $\varpi = \varpi_0$, c'est-à-dire pour la surface considérée, H et K prendront des valeurs de la forme

$$H = \Phi_2(\varphi)\big[\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)\big], \qquad K = \Psi_2(\psi)\big[\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)\big],$$

qui sont précisément les hypothèses (135) du cas III, c'est-à-dire les plus générales relatives à l'emploi de notre méthode d'intégration. Celle-ci sera donc applicable, lors même que les trois surfaces ne seraient pas rapportées à leur paramètre thermométrique, et la solution du problème sera quand même fournie par les équations (136), (137), et (139). C'est ainsi, par exemple, que nous avons pu obtenir dans le numéro précédent la solution relative à l'ellipsoïde, en faisant usage des coordonnées elliptiques $\lambda$, $\mu$, $\nu$, qui ne sont pas des coordonnées thermométriques, et sans être obligé d'avoir recours aux coordonnées de Lamé, qui seules présentent ce caractère pour le système ellipsoïdal.

Si donc il existe, en dehors de celles examinées sous les sept numéros précédents, d'autres surfaces susceptibles de faire partie d'un système orthogonal triplement isotherme, toute la difficulté du problème des lignes géodésiques pour une pareille surface, quelle qu'elle soit, consistera uniquement à déterminer d'abord un pareil système, dont elle puisse faire partie, et cela fait, à trouver ensuite les trois fonctions $\Phi$, $\Psi$, $\Pi$, dont dépendent exclusivement les paramètres $\Delta_1$ des trois surfaces. Mais cette question soulevant ainsi, comme on le voit, une autre beaucoup plus vaste, que nous avions déjà d'ailleurs annoncé l'intention de traiter, à savoir la recherche générale d'un système orthogonal triplement isotherme, et réclamant d'assez longs développements, nous la réserverons pour en faire l'objet d'une nouvelle communication.

Digitized by Google

# APPENDICE

## NOTE I

SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA TRAJECTOIRE D'UN POINT MATÉRIEL, ASSUJETTI A RESTER SUR UNE SURFACE DONNÉE.

Bien que les hypothèses et les résultats relatifs au cas III, pour l'intégration de l'équation différentielle de la trajectoire d'un point astreint à rester sur une surface donnée, comprennent bien comme cas particulier, ainsi que nous l'avons fait remarquer, les hypothèses et les résultats correspondants relatifs aux cas I et II, on n'apperçoit pas, comme cela semblerait devoir être, un lien de généralisation entre le procédé dont nous avons fait usage pour établir le résultat relatif à ce troisième cas, et ceux employés pour les cas précédents. Le succès de ce calcul provient d'ailleurs uniquement d'un artifice, qui peut sembler difficile à imaginer, si l'on ne connaît pas d'avance le résultat auquel on doit arriver. Aussi croyons-nous devoir faire connaître dans cet Appendice le procédé, beaucoup moins rapide assurément, mais plus naturel, et en quelque sorte plus analytique (*), qui nous a en réalité conduits à ce résultat et aux conditions correspondantes, par voie d'extension des idées et des procédés mis en œuvre pour arriver à la solution des deux cas précédents.

L'équation différentielle (53) étant divisée par $(u^2)^2$, deviendra

$$\frac{u^2 d.v^2 - v^2 d.u^2}{(u^2)^2} = \frac{u^2 + v^2}{u^2}\left(\frac{l\mathrm{H}_1}{\psi}d\psi - \frac{v^2}{u^2}\frac{l\mathrm{K}_1}{\rho}d\rho\right),$$

(*) Nous entendons par là, que ce second procédé nous semble présenter mieux le caractère d'un procédé *d'investigation*, le premier au contraire celui d'un procédé de *démonstration*.

Digitized by Google

et pourra s'écrire

$$d\left(\frac{v^2}{u^2}\right) = \left(1 + \frac{v^2}{u^2}\right)\left(\frac{l\mathrm{H}_1}{\psi}d\psi - \frac{v^2}{u^2}\frac{l\mathrm{K}_1}{\varphi}d\varphi\right),$$

ou encore

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{u^2}\right)}{1 + \frac{v^2}{u^2}} = \frac{l\mathrm{H}_1}{\psi}d\psi - \frac{v^2}{u^2}\frac{l\mathrm{K}_1}{\varphi}d\varphi. \tag{1}$$

Sous cette forme, le premier membre étant une différentielle exacte, on voit que cette équation deviendra immédiatement intégrable lorsque le second membre sera également une différentielle exacte, circonstance dont la réalisation exige comme condition nécessaire et suffisante que le rapport $\frac{v^2}{u^2}$ vérifie l'équation

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{l\mathrm{H}_1}{\psi}\right) = \frac{d}{d\psi}\left(-\frac{v^2}{u^2}\frac{l\mathrm{K}_1}{\varphi}\right),$$

ou ce qui est la même chose

$$\frac{d}{d\psi}\left(\frac{l\mathrm{H}_1}{\varphi}\right) + \frac{d}{d\psi}\left(\frac{v^2}{u^2}\frac{l\mathrm{K}_1}{\varphi}\right) = 0,$$

ou encore, en intégrant par rapport à $\psi$, et introduisant comme constante au second membre, une fonction arbitraire de $\varphi$, que nous désignerons pour faciliter les écritures par $\frac{-f'_1(\varphi)}{f_1(\varphi)}$,

$$\frac{l\mathrm{H}_1}{\varphi} + \frac{v^2}{u^2}\frac{l\mathrm{K}_1}{\varphi} = -\frac{f'_1(\varphi)}{f_1(\varphi)}. \tag{2}$$

Si l'on suppose cette condition remplie, et qu'on en tire l'expression

$$\frac{v^2}{u^2}\frac{l\mathrm{K}_1}{\varphi} = -\frac{l\mathrm{H}_1}{\varphi} - \frac{f'_1(\varphi)}{f_1(\varphi)},$$

pour la reporter dans l'équation proposée (1), celle-ci deviendra

$$d.l\left(1 + \frac{v^2}{u^2}\right) = \frac{l\mathrm{H}_1}{\varphi}d\varphi + \frac{l\mathrm{H}_1}{\psi}d\psi + \frac{f'_1(\varphi)}{f_1(\varphi)}d\varphi,$$

Digitized by Google

et donnera en intégrant

$$(3) \qquad l\left(1+\frac{v^2}{u^2}\right)=lH_1+lf_1(\varphi), \qquad \text{ou} \qquad 1+\frac{v^2}{u^2}=H_1f_1(\varphi).$$

Le rapport $\frac{v^2}{u^2}$ devant ainsi satisfaire à deux équations différentes, savoir les équations (2) et (3), il faudra que ces deux équations se confondent ; et l'on aura, en éliminant ce rapport entre ces deux équations, la condition que devront remplir les expressions données $H_1$ et $K_1$, pour que l'équation proposée admette pour intégrale première l'équation (3). A cet effet, tirant de l'équation (3) pour $\frac{v^2}{u^2}$ la valeur

$$\frac{v^2}{u^2}=H_1f_1(\varphi)-1,$$

et la reportant dans l'équation (2), on obtiendra ainsi la condition

$$(4) \qquad \frac{lH_1}{\varphi}+\left(H_1f_1(\varphi)-1\right)\frac{lK_1}{\varphi}=-\frac{f_1'(\varphi)}{f_1(\varphi)},$$

la fonction $f_1$ étant toujours complètement arbitraire. Or si l'on se rapelle que l'on a par définition

$$\frac{H_1}{K_1}=\frac{H(\mathcal{F}+C)}{K(\mathcal{F}+C)}=\frac{H}{K}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{lH_1}{\varphi}-\frac{lK_1}{\varphi}=\frac{d}{d\varphi}\left(l\frac{H}{K}\right),$$

on voit que, si l'on s'impose la condition que la quantité $\frac{d}{d\varphi}\left(l\frac{H}{K}\right)$ soit une fonction quelconque de la variable $\varphi$ seule $F(\varphi)$, l'équation qui précède devenant alors

$$F(\varphi)+H_1\frac{lK_1}{\varphi}.f_1(\varphi)+\frac{f_1'(\varphi)}{f_1(\varphi)}=0,$$

ce qui peut s'écrire

$$H_1\frac{lK_1}{\varphi}=-\frac{1}{f_1(\varphi)}\left[\frac{f_1'(\varphi)}{f_1(\varphi)}+F(\varphi)\right],$$

il faudra et il suffira alors, pour que la condition (4) soit satisfaite, que la quantité $H_1\frac{lK_1}{\varphi}$ soit elle-même une autre fonction

Digitized by Google

quelconque de φ. Si l'on suppose cette seconde condition remplie, et que l'on désigne par $F_1(\varphi)$ cette nouvelle fonction, l'équation précédente pouvant s'écrire alors, en faisant passer tous les termes dans le second membre,

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{f_1(\varphi)}\right) - F(\varphi)\cdot\frac{1}{f_1(\varphi)} - F_1(\varphi) = 0,$$

et devenant ainsi une équation linéaire du premier ordre en $\frac{1}{f_1(\varphi)}$, donnera pour déterminer la fonction $f_1$, en appliquant la formule classique relative à ce type d'équation,

$$(5) \qquad \frac{1}{f_1(\varphi)} = C^{\int F(\varphi)d\varphi}\left[C_1 + \int e^{-\int F(\varphi)d\varphi} F_1(\varphi)d\varphi\right],$$

d'où l'on tirera l'expression de $f_1$ qui en résulte, pour la reporter dans l'intégrale première (3), qui en remplaçant $u^2$ et $v^2$ par leurs valeurs, deviendra

$$(6) \qquad \frac{K d\psi^2}{H d\varphi^2} = H_1 f_1(\varphi) - 1, \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{K}\, d\psi = \pm\sqrt{H(H_1 f_1(\varphi) - 1)}\, d\varphi.$$

Ainsi donc, toutes les fois qu'on aura les deux conditions

$$(7) \qquad \frac{d}{d\varphi}\left(l\frac{H}{K}\right) = F(\varphi), \qquad H_1\frac{lK_1}{\varphi} = F_1(\varphi),$$

F et $F_1$ étant deux fonctions quelconques d'une seule variable, on pourra obtenir l'intégrale première (3) ou (6). On trouverait exactement de même que, si l'on suppose remplies les deux conditions

$$(8) \qquad \frac{d}{d\psi}\left(l\frac{K}{H}\right) = F_2(\psi), \qquad K_1\frac{lH_1}{\psi} = F_3(\psi),$$

$F_2$ et $F_3$ étant deux autres fonctions quelconques, on obtiendra semblablement l'intégrale première

$$(9) \qquad 1 + \frac{u^2}{v^2} = K_1 f_2(\psi) \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{H}\, d\varphi = \pm\sqrt{K(K_1 f_2(\psi) - 1)}\, d\psi,$$

Digitized by Google

dans laquelle la fonction $f_2$ serait définie par l'équation

$$(10) \qquad \frac{1}{f_2(\psi)} = e^{\int F_2(\psi)d\psi}\left[C_2 + \int e^{-\int F_2(\psi)d\psi} F_2(\psi)\,d\psi\right].$$

Toutefois ces deux intégrales premières, prises isolément, ne serviraient pas à grand'chose, parce que les variables ne s'y séparent pas, et qu'elles ne sont pas non plus linéaires ; mais si on suppose les deux séries de conditions (7) et (8) remplies simultanément, on va voir que la question se simplifie considérablement, et que la solution se trouvera ramenée dans un cas fort étendu aux simples quadratures.

En effet, ayant dans cette double hypothèse (7) et (8), séparément par chacune des intégrales (3) et (9)

$$u^2 + v^2 = u^2 H_1 f_1(\varphi) \qquad \text{et} \qquad u^2 + v^2 = v^2 K_1 f_2(\psi),$$

on aura, en égalant ces deux valeurs de $u^2 + v^2$,

$$u^2 H_1 f_1(\varphi) = v^2 K_1 f_2(\psi),$$

ou, en remplaçant $u^2$ et $v^2$ par leurs valeurs conventionnelles $H d\varphi^2$ et $K d\psi^2$, $H_1$ et $K_1$ par leurs valeurs $H(\mathcal{F} + C)$ et $K(\mathcal{F} + C)$, et divisant par $\mathcal{F} + C$,

$$H^2 f_1(\varphi) d\varphi^2 = K^2 f_2(\psi) d\psi^2,$$

ou, en extrayant les racines,

$$(11) \qquad H f_1(\varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi = \pm K f_2(\psi)^{\frac{1}{2}} d\psi,$$

et, pour que dans cette dernière équation les variables se séparent de manière qu'elle puisse s'intégrer par simple quadrature, il sera nécessaire et suffisant que H et K aient des expressions de la forme

$$(12) \qquad H = \Phi_1(\varphi)\Psi_1(\psi)\Omega, \qquad K = \Phi_2(\varphi)\Psi_2(\psi)\Omega,$$

$\Omega$ étant une fonction quelconque des variables $\varphi$ et $\psi$, et $\Phi_1$, $\Psi_1$ $\Phi_2$, $\Psi_2$, quatre fonctions quelconques d'une seule variable.

Il reste à examiner s'il est possible de satisfaire avec les *trois*



Digitized by Google

seules fonctions données H, K, et $\mathcal{F} + C$, qui entrent dans la composition des fonctions $H_1$ et $K_1$, aux *six* conditions (7), (8), et (12), et quelle forme obligée il en résultera pour chacune de ces données.

A cet effet, remarquons en premier lieu que les deux premières conditions (7) et (8) (celles relatives à H et K) sont satisfaites déjà par les expressions (12), attendu que l'on a par ces valeurs

$$\frac{H}{K} = \frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)} \frac{\Psi_1(\psi)}{\Psi_2(\psi)}, \qquad \text{d'où} \qquad l\frac{H}{K} = -l\frac{K}{H} = l\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)} + l\frac{\Psi_1(\psi)}{\Psi_2(\psi)},$$

et par suite

$$\frac{d}{d\varphi}\left(l\frac{H}{K}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(l\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\right), \qquad \frac{d}{d\psi}\left(l\frac{K}{H}\right) = -\frac{d}{d\psi}\left(l\frac{\Psi_1(\psi)}{\Psi_2(\psi)}\right).$$

Admettant donc pour H et K des expressions de la forme (12), il n'y a plus dès lors qu'à s'assurer s'il est possible de satisfaire, avec une forme de la fonction $\mathcal{F} + C$ convenablement choisie, aux deux secondes conditions (7) et (8) (celles relatives à $H_1$ et $K_1$), et en même temps à déterminer cette forme. Or les expressions

$$\begin{cases} H_1 = H(\mathcal{F} + C) = \Phi_1(\varphi)\Psi_1(\psi).\Omega(\mathcal{F} + C), \\ K_1 = K(\mathcal{F} + C) = \Phi_2(\varphi)\Psi_2(\psi).\Omega(\mathcal{F} + C), \end{cases}$$

donnant

$$\begin{cases} lH_1 = l\Phi_1(\varphi) + l\Psi_1(\psi) + l.\Omega(\mathcal{F} + C), \\ lK_1 = l\Phi_2(\varphi) + l\Psi_2(\psi) + l.\Omega(\mathcal{F} + C), \end{cases}$$

et par suite

$$\begin{cases} \dfrac{lH_1}{\psi} = \dfrac{\Psi_1'(\psi)}{\Psi_1(\psi)} + \dfrac{1}{\Omega(\mathcal{F} + C)} \cdot \dfrac{d}{d\psi}\left[\Omega(\mathcal{F} + C)\right], \\ \dfrac{lK_1}{\varphi} = \dfrac{\Phi_2'(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)} + \dfrac{1}{\Omega(\mathcal{F} + C)} \cdot \dfrac{d}{d\varphi}\left[\Omega(\mathcal{F} + C)\right], \end{cases}$$

les secondes conditions (7) et (8) seront alors

$$\begin{cases} \Phi_1(\varphi)\Psi_1(\psi).\Omega(\mathcal{F} + C)\left[\dfrac{\Phi_2'(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)} + \dfrac{1}{\Omega(\mathcal{F} + C)}\dfrac{d}{d\varphi} \cdot \Omega(\mathcal{F} + C)\right] = F_1(\varphi), \\ \Phi_2(\varphi)\Psi_2(\psi).\Omega(\mathcal{F} + C)\left[\dfrac{\Psi_1'(\psi)}{\Psi_1(\psi)} + \dfrac{1}{\Omega(\mathcal{F} + C)}\dfrac{d}{d\psi} \cdot \Omega(\mathcal{F} + C)\right] = F_2(\psi). \end{cases}$$

Digitized by Google

Or ces deux équations, qui peuvent s'écrire plus simplement, en les divisant respectivement par $\Phi_1(\varphi)\,\Psi_1(\psi)$, et $\Phi_2(\varphi)\,\Psi_2(\psi)$,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\varphi}\cdot\Omega(\mathcal{F}+C)+\dfrac{\Phi_2'(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\cdot\Omega(\mathcal{F}+C)-\dfrac{1}{\Psi_1(\psi)}\dfrac{F_1(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)}=0, \\ \dfrac{d}{d\psi}\cdot\Omega(\mathcal{F}+C)+\dfrac{\Psi_1'(\psi)}{\Psi_1(\psi)}\cdot\Omega(\mathcal{F}+C)-\dfrac{1}{\Phi_2(\varphi)}\dfrac{F_2(\psi)}{\Psi_2(\psi)}=0, \end{cases}$$

sont deux équations linéaires du premier ordre, qui donnent pour la fonction $\Omega(\mathcal{F}+C)$ les deux expressions

$$(13)\qquad \begin{cases} \Omega(\mathcal{F}+C)=\dfrac{1}{\Phi_2(\varphi)}\left[C'+\dfrac{1}{\Psi_1(\psi)}\int\Phi_2(\varphi)\dfrac{F_1(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)}d\varphi\right], \\ \Omega(\mathcal{F}+C)=\dfrac{1}{\Psi_1(\psi)}\left[C''+\dfrac{1}{\Phi_2(\varphi)}\int\Psi_1(\psi)\dfrac{F_2(\psi)}{\Psi_2(\psi)}d\psi\right], \end{cases}$$

lesquelles, malgré leur différence d'aspect, sont bien en réalité identiques, ainsi qu'il est aisé de le reconnaître. En effet dans la première d'une part, la constante d'intégration $C'$ étant une fonction arbitraire de $\psi$ peut être désignée par $\frac{-\Psi(\psi)}{\Psi_1(\psi)}$, $\Psi(\psi)$ étant une nouvelle fonction arbitraire, et d'autre part la fonction $F_1(\varphi)$ étant complètement arbitraire, l'intégrale en $\varphi$ qui y figure est elle-même une fonction complètement arbitraire, et peut être représentée simplement par $\Phi(\varphi)$. De même dans la seconde expression, la constante d'intégration $C''$ étant une fonction arbitraire de $\varphi$ peut être représentée par $\frac{\Phi(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}$, et la fonction $F_2(\varphi)$ étant par hypothèse, elle aussi, arbitraire, l'intégrale en $\psi$ est une nouvelle fonction arbitraire que l'on peut désigner par $-\Psi(\psi)$. Si l'on effectue ce simple changement de notation dans les deux expressions (13), on voit qu'elles se réduisent simultanément à la suivante

$$\Omega(\mathcal{F}+C)=\frac{\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)}{\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi)},$$

et par conséquent l'expression qu'on en déduit pour $\mathcal{F}+C$, savoir

$$(14)\qquad \mathcal{F}(\varphi,\psi,\varpi)+C=\frac{\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)}{\Omega\Psi_1(\psi)(\Phi_2(\varphi)},$$

jointe aux expressions (12) de H et de K, vérifient bien simultanément les conditions (7) et (8), et permettront dès lors de rame-

Digitized by Google

ner l'intégration de l'équation proposée aux simples quadratures.

Supposant donc que H, K, et $\mathcal{F}$ + C, aient des expressions de la forme (12) et (14), il s'ensuivra tout d'abord pour $H_1$ et $K_1$ les expressions suivantes

$$(15)\quad \begin{cases} H_1 = H(\mathcal{F}+C) = \Phi_1(\varphi)\Psi_1(\psi)\Omega\cdot\dfrac{\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)}{\Omega\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi)} = \dfrac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\Big[\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)\Big], \\ K_1 = K(\mathcal{F}+C) = \Phi_2(\varphi)\Psi_2(\psi)\Omega\cdot\dfrac{\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)}{\Omega\Psi_1(\varphi)\Phi_2(\varphi)} = \dfrac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}\Big[\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)\Big], \end{cases}$$

d'où l'on tirera

$$\begin{cases} \dfrac{H_1}{K_1} = \dfrac{\Phi_1(\varphi)\Psi_1(\psi)}{\Phi_2(\psi)\Psi_2(\psi)}, & l\dfrac{H_1}{K_1} = l\dfrac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)} + l\dfrac{\Psi_1(\psi)}{\Psi_2(\psi)}, \\ lH_1 = l\dfrac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)} + l\Big(\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)\Big), & lK_1 = l\dfrac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)} + l\Big(\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)\Big), \\ \dfrac{lH_1}{\psi} = \dfrac{-\Psi'(\psi)}{\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)}, & \dfrac{lK_1}{\varphi} = \dfrac{\Phi'(\varphi)}{\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)}. \end{cases}$$

Cela posé, les fonctions $f_1(\varphi)$ et $f_2(\psi)$ seront déterminées par les formules (5) et (10), dans lesquelles il faudra faire, par définition d'abord, puis en ayant égard aux valeurs qui précèdent,

$$\begin{cases} F(\varphi) = -\dfrac{d}{d\varphi}\Big(l\dfrac{H_1}{K_1}\Big) = \dfrac{d}{d\varphi}\Big(l\dfrac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\Big), \quad F_2(\psi) = -\dfrac{d}{d\psi}\Big(l\dfrac{K_1}{H_1}\Big) = \dfrac{d}{d\psi}\Big(l\dfrac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}\Big), \\ F_1(\varphi) = H_1\dfrac{lK_1}{\varphi} = \dfrac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\Big[\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)\Big]\dfrac{\Phi'(\varphi)}{\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)} = \dfrac{\Phi_1(\varphi)\Phi'(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}, \\ F_3(\varphi) = K_1\dfrac{lH_1}{\psi} = \dfrac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}\Big[\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)\Big]\dfrac{-\Psi'(\psi)}{\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)} = \dfrac{-\Psi_2(\psi)\Psi'(\psi)}{\Psi_1(\psi)}, \end{cases}$$

expressions qui donneront successivement

$$\begin{cases} \int F(\varphi)d\varphi = \int\dfrac{d}{d\varphi}\Big(l\dfrac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\Big)d\varphi = l\dfrac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}, & e^{\int F(\varphi)d\varphi} = \dfrac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}, \\ \int e^{-\int F(\varphi)d\varphi}F_1(\varphi)d\varphi = \int\dfrac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)}\cdot\dfrac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\Phi'(\varphi)d\varphi = \int\Phi'(\varphi)d\varphi = \Phi(\varphi), \\ \int F_2(\psi)d\psi = \int\dfrac{d}{d\psi}\Big(l\dfrac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}\Big)d\psi = l\dfrac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}, & e^{\int F_2(\psi)d\psi} = \dfrac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}, \\ \int e^{-\int F_2(\psi)d\psi}F_3(\psi)d\psi = \int\dfrac{\Psi_1(\psi)}{\Psi_2(\psi)}\cdot\Big(\dfrac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}\Psi'(\psi)\Big)d\psi = \int\Big(-\Psi'(\psi)\Big)d\psi = -\Psi(\psi); \end{cases}$$

Digitized by Google

en sorte que, par la substitution de ces différentes quadratures dans les expressions (5) et (10), on aura simplement pour $\frac{1}{f_1(\varphi)}$ et $\frac{1}{f_2(\psi)}$ celles-ci

$$(16)\qquad \frac{1}{f_1(\varphi)} = \frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\Big(C_1 + \Phi(\varphi)\Big), \qquad \frac{1}{f_2(\psi)} = \frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}\Big(C_2 - \Psi(\psi)\Big),$$

d'où l'on tirera inversement

$$(17)\qquad f_1(\varphi) = \frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)\big[\Phi(\varphi) + C_1\big]}, \qquad f_2(\psi) = \frac{\Psi_1(\psi)}{-\Psi_2(\psi)\big[\Psi(\psi) - C_2\big]},$$

lesquelles expressions devront elles-mêmes être substituées, ainsi que celles (12) de H et de K, dans l'intégrale première (11). Or, cette équation contenant alors les deux constantes $C_1$ et $C_2$, il est clair que ces deux constantes ne sont pas indépendantes, mais qu'il existe entre elles une relation, de manière qu'il n'y en n'ait réellement qu'une seule d'arbitraire.

En effet, si des deux intégrales premières (3) et (9) l'on tire

$$\frac{v^2}{u^2} = H_1 f_1(\varphi) - 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{u^2}{v^2} = K_1 f_2(\psi) - 1,$$

on en conclura, en multipliant membre à membre ces deux dernières équations,

$$\big[H_1 f_1(\varphi) - 1\big]\big[K_1 f_2(\psi) - 1\big] = 1,$$

ou

$$H_1 K_1 f_1(\varphi) f_2(\psi) - H_1 f_1(\varphi) - K_1 f_2(\psi) = 0,$$

ou encore, en divisant par le produit $f_1(\varphi)\, f_2(\psi)$,

$$K_1 \frac{1}{f_1(\varphi)} + H_1 \frac{1}{f_2(\psi)} = H_1 K_1,$$

équation qu'on pourrait croire au premier abord devoir être l'intégrale générale elle-même, attendu qu'elle résulte de la combinaison de deux intégrales premières différentes, et semble renfermer de ce chef deux constantes arbitraires distinctes $C_1$ et $C_2$. Mais on va voir qu'il n'en est rien, et qu'elle fournit simplement une relation entre ces constantes.

En effet, si l'on y remet à la place de $H_1$ et $K_1$ leurs valeurs

Digitized by Google

(15), et au lieu de $\frac{1}{f_1(\varphi)}$ et $\frac{1}{f_2(\psi)}$ leurs expressions (16), elle devient

$$\left[\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\Big(C_1+\Phi(\varphi)\Big)+\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}\Big(C_2-\Psi(\psi)\Big)\right]\Big[\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)\Big]$$
$$=\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}\Big[\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)\Big]^2,$$

c'est-à-dire simplement, en réduisant,

$$\Big[\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)\Big]\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}(C_1+C_2)=0,$$

condition qui, devant être remplie pour toutes les valeurs de $\varphi$ et de $\psi$, ne peut être satisfaite qu'en prenant $C_2=-C_1$.

Substituant donc, après y avoir remis cette dernière valeur de $C_2$, les expressions (17) des fonctions $f_1$ et $f_2$, ainsi que celle (12) de H et K, dans l'intégrale première (11), celle-ci deviendra

$$\Phi_1(\varphi)\Psi_1(\psi)\Omega\cdot\sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)\big[\Phi(\varphi)+C_1\big]}}\,d\varphi$$
$$=\pm\,\Phi_2(\varphi)\Psi_2(\psi)\Omega\cdot\sqrt{\frac{\Psi_1(\psi)}{-\Psi_2(\psi)\big[\Psi(\psi)+C_1\big]}}\,d\psi,$$

ou, en simplifiant, supprimant le facteur commun $\Omega\sqrt{\Psi_1\Phi_2}$, et séparant les variables,

$$\sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi)+C_1}}=\pm\sqrt{\frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}}\frac{d\psi}{\sqrt{\Psi(\psi)+C_1}},$$

et donnera par conséquent pour intégrale générale

$$(18)\qquad \int\sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi)+C_1}}+\int\sqrt{\frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}}\frac{d\psi}{\sqrt{\Psi(\psi)+C_1}}=C'.$$

Puis l'équation de la trajectoire étant ainsi obtenue, on intégrerait l'équation des forces vives, comme nous l'exposons dans le paragraphe II.

La solution que nous venons d'obtenir pour la trajectoire coïncide exactement, ainsi que les hypothèses correspondantes (12) et (14), avec celles contenues dans les formules (90) et (91), que nous avions déduites des formules plus simples (76) et (77),

Digitized by Google

relatives au cas particulier des surfaces isothermes. Or si l'on se reporte aux expressions correspondantes (15) de $H_1$ et $K_1$, il est facile de voir qu'on pourra inversement en déduire ces mêmes formules (76) et (77), en faisant simplement dans ces expressions (15) et dans la solution (18), $\Psi_1 = const = 1$, $\Phi_2 = const = 1$, ce qui les changera tout d'abord dans les suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} H_1 = \Phi_1(\varphi)\big[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)\big], \qquad K_1 = \Psi_2(\psi)\big[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)\big], \\ \displaystyle\int\sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi(\varphi)+C_1}}\,d\varphi \pm \int\sqrt{\frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi(\psi)+C_1}}\,d\psi = C'; \end{array}\right.$$

puis, écrivant ensuite simplement $\Phi_2$ à la place de $\Phi_1$, $-\Psi_2$ à la place de $\Psi_2$, et enfin $\Phi_1$ et $\Psi_1$ au lieu de $\Phi$ et $\Psi$, on retrouve bien littéralement les formules (68) et (70) du cas III, qui se trouvent ainsi démontrées par une autre voie, comme nous nous étions proposé de le faire.

Enfin remarquons en terminant qu'un procédé semblable permettra aussi bien de déduire des formules générales (90) et (91) à la fois toutes celles (76) et (77), relatives au cas particulier des surfaces isothermes. Il suffira pour cela de faire en premier lieu dans les hypothèses (90) et les équations (91)

$$\Phi_1(\varphi) = F_1(\varphi), \qquad \Psi_1(\psi) = \text{const} = 1, \qquad \Phi_2(\varphi) = \text{const} = 1,$$
$$\Psi_2(\psi) = F_2(\psi), \qquad \Omega = \Phi_3(\varphi) - \Psi_3(\psi),$$

ce qui donnera en même temps

$$H = F_1(\varphi)\big[\Phi_3(\varphi) - \Psi_3(\psi)\big], \qquad K = F_2(\psi)\big[\Phi_3(\varphi) - \Psi_3(\psi)\big],$$
$$\mathfrak{F} + C = \frac{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}{\Phi_3(\varphi) - \Psi_3(\psi)},$$

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int\sqrt{\frac{F_1(\varphi)}{\Phi(\varphi)+C_1}}\,d\varphi \pm \int\sqrt{\frac{-F_2(\psi)}{\Psi(\psi)+C_1}}\,d\psi = C', \\ \displaystyle \pm\int\big[\Phi_3(\varphi) - \Psi_3(\psi)\big]_\varphi\sqrt{\frac{F_1(\varphi)}{\Phi(\varphi)+C_1}}\,d\varphi \\ \text{ou bien} \\ \displaystyle \mp\int\big[\Phi_3(\varphi) - \Psi_3(\psi)\big]_\psi\sqrt{\frac{-F_2(\psi)}{\Phi(\psi)+C_1}}\,d\psi \end{array}\right\} = \sqrt{2}(t + C''),$$

Digitized by Google

puis, par un simple changement de notation, de faire ensuite

$$(20)\quad \begin{cases} F_1(\varphi) = \Phi_2(\varphi), & F_2(\psi) = -\Psi_2(\psi), \\ \Phi(\varphi) = \Phi_1(\varphi), \quad \Psi(\psi) = \Psi_1(\psi), & \Phi_2(\varphi) = \Phi(\varphi), \quad \Psi_2(\psi) = \Psi(\psi), \end{cases}$$

ce qui redonnera bien, d'abord comme tout à l'heure, pour les expressions de H, K, $\mathcal{F} + C$, et l'équation de la trajectoire, les formules (76) et la première équation (77); et enfin pour la seconde équation l'une ou l'autre des deux suivantes

$$\left.\begin{aligned} &\pm\int\left[\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)\right]_\varphi\sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C_1}}\,d\varphi \\ &\text{ou bien} \\ &\mp\int\left[\Phi(\varphi)-\Psi(\psi)\right]_\psi\sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C_1}}\,d\psi \end{aligned}\right\} = \sqrt{2}\,(t+C''),$$

équations que l'on peut encore écrire ainsi, en séparant en deux termes l'intégrale,

$$\left.\begin{aligned} &\pm\left[\int^{\varphi}\Phi(\varphi)\sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C_1}}\,d\varphi-\int\left[\Psi(\psi)\right]_\varphi\sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C_1}}\,d\varphi\right] \\ &\text{ou bien} \\ &\mp\left[\int\left[\Phi(\varphi)\right]_\psi\sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C_1}}\,d\psi-\int\Psi(\psi)\sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C_1}}\,d\psi\right] \end{aligned}\right\} = \sqrt{2}(t+C'').$$

Or si l'on tient compte de l'intégrale première

$$\sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C_1}}\,d\varphi = \mp\sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C_1}}\,d\psi,$$

qui résulte immédiatement de la différentiation de l'équation de la trajectoire que nous venons d'obtenir, c'est-à-dire de la première équation (19) transcrite avec les notations (20), et qu'on prenne pour variable $\psi$ au lieu de $\varphi$ dans la seconde intégrale de la première forme de l'équation qui précède, et $\varphi$ au lieu de $\psi$ dans la première intégrale de la seconde forme, il est clair que les deux formes de l'équation ci-dessus reproduiront bien littéralement encore l'une et l'autre la seconde de nos deux équations (77), ce qui justifie le fait énoncé en dernier lieu.

Digitized by Google

# NOTE II

SUR L'EMPLOI DE LA MÉTHODE DE JACOBI, POUR TRAITER LE MÊME PROBLÈME.

On peut obtenir assez facilement par la méthode de Jacobi la solution (103), à laquelle nous sommes parvenus dans notre second chapitre, pour le mouvement d'un point matériel astreint à rester sur un ellipsoïde, et soumis à une force d'attraction proportionnelle à la distance. Il suffit pour cela d'ajouter le terme représentant la fonction des forces (100) au second membre de l'équation aux dérivées partielles, qu'il pose pour déterminer la fonction caractéristique W, dans la 28e de ses *Vorlesungen über Dynamik* (page 214), à savoir celle qui précède son équation (1), et alors cette équation, étant transcrite avec les notations dont nous avons fait usage en traitant ce problème, deviendra la suivante

$$\frac{2f(\varphi)}{(\varphi-\varpi)(\varphi-\psi)}\left(\frac{W}{\varphi}\right)^2+\frac{2f(\psi)}{(\psi-\varpi)(\psi-\varphi)}\left(\frac{W}{\psi}\right)^2=k(\varphi+\psi)+kD+C,$$

laquelle pourra s'écrire, en imitant son procédé,

$$\frac{f(\varphi)}{\varphi-\varpi}\left(\frac{W}{\varphi}\right)^2-\frac{f(\psi)}{\psi-\varpi}\left(\frac{W}{\psi}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[k\varphi^2+(kD+C)\varphi+C_1-\left(k\psi^2+(kD+C)\psi+C_1\right)\right],$$

et sera vérifiée en satisfaisant séparément aux deux équations, intégrables chacune par quadrature,

$$\begin{cases}\dfrac{f(\varphi)}{\varphi-\varpi}\left(\dfrac{W}{\varphi}\right)^2=\dfrac{1}{2}\left[k\varphi^2+(kD+C)\varphi+C_1\right],\\[2ex]\dfrac{f(\psi)}{\psi-\varpi}\left(\dfrac{W}{\psi}\right)^2=\dfrac{1}{2}\left[k\psi^2+(kD+C)\psi+C_1\right],\end{cases}$$

Digitized by Google

d'où l'on conclura par conséquent la solution complète

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\int \sqrt{\frac{\rho - \varpi}{f(\rho)}\left(k\rho^2 + (kD + C)\rho + C_1\right)}\, d\rho \right.$$
$$\left. + \int \sqrt{\frac{\psi - \varpi}{f(\psi)}\left(k\psi^2 + (kD + C)\psi + C_1\right)}\, d\psi \right],$$

et dès lors les deux équations

$$\frac{dW}{dC_1} = \frac{C'}{2\sqrt{2}}, \qquad \frac{dW}{dC} = t + C'',$$

que l'on doit écrire d'après sa règle, pour avoir les intégrales du mouvement, reproduisent *littéralement* nos deux équations (103).

Nous signalons ce fait parce qu'il peut être généralisé, relativement à la question du mouvement d'un point sur une surface quelconque, et conduit dès lors à une remarque intéressante, à savoir que si, adoptant la méthode de Jacobi pour traiter ce problème, on recherche quelle forme doit avoir l'expression de la fonction des forces pour que la solution puisse en être obtenue à l'aide de simples quadratures, on retrouve exactement les mêmes formes (73) et (85) auxquelles nous a conduits notre méthode, lesquelles acquièrent ainsi le caractère de conditions *essentielles*, c'est-à-dire inhérentes à la nature même de la question, et non plus seulement à la méthode qui les a fournies.

Nous allons vérifier ce fait, en distinguant, comme nous l'avons fait dans notre chapitre II, le cas des surfaces isothermes, et un second cas plus général, pour l'hypothèse où la surface donnée ne serait pas isotherme.

1° *Surfaces isothermes.* — Pour le cas des surfaces isothermes, l'expression de la force vive 2T étant, eu égard aux valeurs (72) de H et K,

$$2T = H\rho'^2 + K\psi'^2 = \Phi_2(\rho)\left[\Phi(\rho) - \Psi(\psi)\right]\rho'^2 + \Psi_2(\psi)\left[\Psi(\psi) - \Phi(\rho)\right]\psi'^2,$$

Digitized by Google

si l'on fait avec Jacobi

$$\frac{dT}{d\varphi'} = \Phi_2(\varphi)\left[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)\right]\varphi' = \frac{W}{\varphi}, \qquad \frac{dT}{d\psi'} = \Psi_2(\psi)\left[\Psi(\psi) - \Phi(\varphi)\right]\psi' = \frac{W}{\psi},$$

d'où l'on déduira, par substitution dans l'équation précédente,

$$2T = \frac{1}{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}\left[\frac{1}{\Phi_2(\varphi)}\left(\frac{W}{\varphi}\right)^2 - \frac{1}{\Psi_2(\psi)}\left(\frac{W}{\psi}\right)^2\right],$$

on aura pour déterminer la fonction caractéristique W, l'équation

$$\frac{1}{2\left[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)\right]}\left[\frac{1}{\Phi_2(\varphi)}\left(\frac{W}{\varphi}\right)^2 - \frac{1}{\Psi_2(\psi)}\left(\frac{W}{\psi}\right)^2\right] = \mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C,$$

ou

$$\frac{1}{2\Phi_2(\varphi)}\left(\frac{W}{\varphi}\right)^2 - \frac{1}{2\Psi_2(\psi)}\left(\frac{W}{\psi}\right)^2 = \left[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)\right]\left[\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C\right];$$

et dès lors il est clair que pour que le second membre puisse se décomposer, de même que le premier, en deux portions dépendant, l'une de $\varphi$ seulement, et l'autre de $\psi$, il faudra bien que la fonction $\mathcal{F} + C$ ait la forme (73) que nous lui avons assignée, à savoir

$$(1) \qquad \mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C = \frac{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)}{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}.$$

Avec cette forme, l'équation qui précède étant vérifiée en satisfaisant séparément aux deux équations, intégrables chacune par quadrature,

$$\frac{1}{2\Phi_2(\varphi)}\left(\frac{W}{\varphi}\right)^2 = \Phi_1(\varphi) + C_1, \qquad \frac{1}{2\Psi_2(\psi)}\left(\frac{W}{\psi}\right)^2 = \Psi_1(\psi) + C_1,$$

on est conduit immédiatement à la solution complète

$$W = \int\sqrt{2\Phi_2(\varphi)\left(\Phi_1(\varphi) + C_1\right)}\,d\varphi + \int\sqrt{2\Psi_2(\psi)\left(\Psi_1(\psi) + C_1\right)}\,d\psi,$$

Digitized by Google

et les deux équations

$$(2) \qquad \frac{dW}{dC_1} = \frac{C'}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{dW}{dC} = t + C_1',$$

(W étant fonction implicitement de C par l'intermédiaire de $\Phi_1$ et $\Psi_1$) formeront un système équivalent à nos deux équations (77).

Le fait serait manifeste, si l'on se bornait à considérer la première de ces deux équations seulement, laquelle reproduit bien littéralement notre première équation (77) ; mais il n'en n'est pas de même de la seconde, et pour mettre en évidence l'équivalence des deux systèmes, il est nécessaire d'avoir recours à la préparation suivante.

L'hypothèse (1) pouvant s'écrire

$$\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi) = \big[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)\big]\big[\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C\big],$$

donnera, en différentiant par rapport à C,

$$\frac{d\Phi_1}{dC} - \frac{d\Psi_1}{dC} = \Phi(\varphi) - \Psi(\psi),$$

car les fonctions $\Phi$ et $\Psi$, introduites dans la question par les expressions de H et de K, ne dépendent que du système coordonné, et ne contiennent évidemment pas C. Ayant donc mis cette dernière égalité sous la forme

$$(3) \qquad \frac{d\Phi_1}{dC} - \Phi(\varphi) = \frac{d\Psi_1}{dC} - \Psi(\psi) = c,$$

dans laquelle le premier membre ne contient que $\varphi$, pendant que le second ne contient que $\psi$, on en conclura que leur valeur commune c est une constante. Cela posé, multipliant par cette même constante c la première de nos équations (77), en l'écrivant ainsi

$$\int c\sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi) + C_1}}\,d\varphi \pm \int c\sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi) + C_1}}\,d\psi = cC',$$

Digitized by Google

nous y remplacerons $c$ respectivement, sous le premier signe $\int$ par sa première valeur (3), et sous le second signe $\int$ par sa seconde valeur (3), et nous aurons ainsi l'équation

$$\int\left(\frac{d\Phi_1}{dC}-\Phi(\varphi)\right)\sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C_1}}d\varphi\pm\int\left(\frac{d\Psi_1}{dC}-\Psi(\psi)\right)\sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C_1}}d\psi=cC',$$

parfaitement équivalente à notre première équation (77), puis qu'elle en provient simplement par la multiplication par un facteur constant.

Si donc on la substitue pour un instant à cette première équation (77), et qu'on y ajoute la seconde, on obtiendra celle-ci, qui pourra elle-même être substituée dans le système (77) à la seconde équation,

$$\int\frac{d\Phi_1}{dC}\sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)+C_1}}d\varphi\pm\int\frac{d\Psi_1}{dC}\sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C_1}}d\psi=\pm\sqrt{2}(t+C'')+cC'.$$

Or, cette dernière équation pouvant être écrite ainsi

$$\int\frac{\sqrt{2}d\Phi_1}{2\,dC}\sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\psi_1(\varphi)+C_1}}d\varphi\pm\int\frac{\sqrt{2}d\Psi_1}{2\,dC}\sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)+C_1}}d\psi=t+C_1'',$$

en la divisant par $\sqrt{2}$, et faisant $C''\pm\frac{cC'}{\sqrt{2}}=C_1''$, reproduit alors littéralement la seconde équation (2), ce qui démontre bien l'équivalence du système (2) de Jacobi avec le système de nos deux équations (77).

La préparation, que nous venons d'effectuer, n'était pas nécessaire à la vérité, dans le cas particulier examiné au début de cette note, parce qu'avec les expressions (102) des fonctions $\Phi$, $\Psi$, $\Phi_1$, $\Psi_1$, relatives à ce cas, la valeur (3) de la constante $c$ étant alors nulle, la dernière équation que nous venons d'obtenir se réduit manifestement dans ce cas à la seconde équation (77) elle-même.

2° *Surfaces non isothermes.* — De même, pour le second cas plus général, qui pourra trouver son application lorsque la sur-

Digitized by Google

face donnée ne sera pas isotherme, admettant dans ce cas les hypothèses (81), on aura

$$2T = H\varphi'^2 + K\psi'^2 = \Phi_1(\varphi)\Psi_1(\psi)\Omega \cdot \varphi'^2 + \Phi_2(\varphi)\Psi_2(\psi)\Omega \cdot \psi'^2,$$

et, en faisant comme tout à l'heure

$$\frac{dT}{d\varphi'} = \Phi_1(\varphi)\Psi_1(\psi)\Omega \cdot \varphi' = \frac{W}{\varphi}, \qquad \frac{dT}{d\psi'} = \Phi_2(\varphi)\Psi_2(\psi)\Omega \cdot \psi' = \frac{W}{\psi},$$

d'où l'on déduira, en reportant dans l'équation précédente,

$$2T = \frac{1}{\Phi_1(\varphi)\Psi_1(\psi)\Omega}\left(\frac{W}{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\Phi_2(\varphi)\Psi_2(\psi)\Omega}\left(\frac{W}{\psi}\right)^2,$$

on aura de même pour déterminer la fonction caractéristique W, l'équation

$$\frac{1}{2\Phi_1(\varphi)\Psi_1(\psi)\Omega}\left(\frac{W}{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2\Phi_2(\varphi)\Psi_2(\psi)\Omega}\left(\frac{W}{\psi}\right)^2 = \mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C,$$

ou en multipliant par $\Psi_1(\psi)\,\Phi_2(\varphi)\,\Omega$,

$$\frac{1}{2}\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)}\left(\frac{W}{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\Psi_1(\psi)}{\Psi_2(\psi)}\left(\frac{W}{\psi}\right)^2 = \Omega\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi)\left[\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C\right];$$

et l'on voit dès lors que pour que cette équation puisse être décomposée en deux comme précédemment, chacune des deux parties ne renfermant que l'une des variables $\varphi$ ou $\psi$, il est encore nécessaire que la fonction $\mathcal{F} + C$ ait une expression de la forme (85), comme l'exige notre méthode, à savoir

$$(4) \qquad \mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C = \frac{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}{\Omega\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi)}.$$

Avec cette forme, l'équation qui précède étant alors vérifiée en satisfaisant séparément aux deux équations, intégrables chacune par quadrature,

$$\frac{1}{2}\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)}\left(\frac{W}{\varphi}\right)^2 = \Phi(\varphi) + C_1, \qquad \frac{1}{2}\frac{\Psi_1(\psi)}{\Psi_2(\psi)}\left(\frac{W}{\psi}\right)^2 = -\Psi(\psi) - C_1,$$

Digitized by Google

on obtient immédiatement pour W la solution complète

$$W = \int \sqrt{2\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\left(\Phi(\varphi) + C_1\right)}\, d\varphi + \int \sqrt{2\frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}\left(\Psi(\psi) + C_1\right)}\, d\psi,$$

laquelle fournit pour intégrale du mouvement, d'après la règle de Jacobi, les deux équations

$$(5) \qquad \frac{dW}{dC_1} = \frac{C'}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{dW}{dC} = t + C''.$$

Or ces deux équations, chacune individuellement, reproduisent exactement nos deux équations (91).

Le fait est évident relativement à la première ; pour le faire ressortir avec la même clarté à l'égard de la seconde qui précède, qui est en développant la dérivée $\frac{dW}{dC}$,

$$\int \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{d\Phi}{dC}\sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi) + C_1}}$$

$$+ \int \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{d\Psi}{dC}\sqrt{\frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}}\frac{d\psi}{\sqrt{\Psi(\psi) + C_1}} = t + C'',$$

nous y introduirons pour un instant la différentielle auxiliaire *du*, définie par notre équation (89) qui résulte immédiatement de la différentation de l'équation de la trajectoire, ou ce qui est la même chose de la première équation ci-dessus (5), et avec cette notation l'équation qui précède pourra s'écrire

$$\int \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d\Phi}{dC}du - \int \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d\Psi}{dC}du = t + C'',$$

ou en multipliant par $\sqrt{2}$,

$$(6) \qquad \int \left(\frac{d\Phi}{dC} - \frac{d\Psi}{dC}\right)du = \sqrt{2}(t + C'').$$

Digitized by Google

Cela fait, si l'on remarque que notre hypothèse (4) qui peut s'écrire

$$\Phi(\varphi) - \Psi(\psi) = \Omega\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi)\left[\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C\right],$$

donne, eu égard à l'observation déjà faite dans le cas précédent,

$$\frac{d\Phi}{dC} - \frac{d\Psi}{dC} = \Omega\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi),$$

l'équation précédente (6) deviendra, en y substituant cette dernière expression, la suivante

$$\int \Omega\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi)\,du = \sqrt{2}(t + C''),$$

laquelle, en y remplaçant enfin la différentielle *du* successivement par chacune de ses deux valeurs de définition (89), reproduira encore littéralement l'une et l'autre des deux formes de notre seconde équation (91).

On voit donc, en résumé, qu'au point de vue de la réalisation effective des calculs, il y a coïncidence parfaite, pour le problème spécial du mouvement d'un point sur une surface donnée, entre notre méthode et celle de Jacobi, non seulement, ce qui était nécessaire, quant à l'expression analytique des résultats dans certains cas particuliers, mais également, ce qui n'était pas forcé, quant au nombre et à l'étendue de ces cas capables de procurer le succès effectif de ces méthodes, c'est-à-dire, en d'autres termes, quant aux conditions imposées aux données, pour que la solution puisse s'obtenir à l'aide de simples quadratures. *Pour ce problème restreint*, et si l'on n'a en vue encore une fois que la réalisation complète et définitive des calculs nécessaires pour en procurer la solution, on peut donc dire que ces deux méthodes ont exactement la même généralité, et peuvent être substituées l'une à l'autre, sans étendre ni resserrer le champ d'application de ces calculs.

---

Digitized by Google

# NOTE III

SUR LA DÉTERMINATION EN GRANDEUR ET EN DIRECTION DU RAYON DE COURBURE DE LA MÊME TRAJECTOIRE.

Nous avons donné sans démonstration, dans le Mémoire que l'on vient de lire, sous les numéros (80$^{bis}$) et (80$^{ter}$) d'une part, et (92$^{bis}$) et (92$^{ter}$) d'autre part, les formules propres à faire connaître immédiatement, à l'aide de simples différentiations de fonctions données, la grandeur et la direction du rayon de courbure de la trajectoire d'un point matériel assujetti à rester sur une surface donnée, toutes les fois que l'équation de cette surface, ainsi que la fonction des forces, rempliront simultanément les conditions que nous avons montrées être *nécessaires* (voir la Note précédente) et suffisantes, pour que le problème de la détermination du mouvement puisse être ramené aux quadratures, conditions exprimées par nos formules (76) pour le cas des surfaces isothermes, et par les formules plus générales (90), qui pourront convenir à des surfaces non isothermes.

Il nous reste, pour achever complètement notre tâche, à montrer rapidement, en distinguant encore les deux mêmes cas, comment les méthodes développées dans notre paragraphe premier conduisent tout naturellement aux formules, que nous venons de rappeler en premier lieu.

1° *Surfaces isothermes.* — En ayant égard aux valeurs (76) de H et K, admises comme hypothèses, l'expression (48) de la valeur de $ds^2$ tant de fois rappelée, étant alors

$$ds^2 = \mathrm{H}d\gamma^2 + \mathrm{K}d\psi^2 = \big[\Phi(\gamma) - \Psi(\psi)\big]\big[\Phi_2(\gamma)d\gamma^2 - \Psi_2(\psi)d\psi^2\big],$$

ou en tenant compte de la dernière équation (75$^{bis}$),

$$ds^2 = \big[\Phi(\gamma) - \Psi(\psi)\big]\big[\Phi_1(\gamma) - \Psi_1(\psi)\big]du^2,$$



Digitized by Google

pourra par suite être écrite, en y remplaçant la différentielle $du$ successivement par chacune de ses deux valeurs de définition (75), sous l'une ou l'autre des deux formes

$$ds^2 = (\Phi - \Psi)(\Phi_1 - \Psi_1)\frac{\Phi_2}{\Phi_1 + C_1}\,d\varphi^2 = (\Phi - \Psi)(\Phi_1 - \Psi_1)\frac{\Psi_2}{\Psi_1 + C_1}\,d\psi^2,$$

d'où l'on conclura, en divisant par $(\Phi_1 - \Psi_1)\,ds^2$, et ayant égard de nouveau aux expressions (76) de H et K,

$$\frac{1}{\Phi_1 - \Psi_1} = \frac{H\varphi'^2}{\Phi_1 + C_1} = \frac{-K\psi'^2}{\Psi_1 + C_1},$$

et par suite successivement

$$(1)\qquad H\varphi'^2 = \frac{\Phi_1 + C_1}{\Phi_1 - \Psi_1}, \qquad K\psi'^2 = \frac{-(\Psi_1 + C_1)}{\Phi_1 - \Psi_1} = \frac{\Psi_1 + C_1}{\Psi_1 - \Phi_1},$$

$$(2)\qquad (H\varphi')^2 = H^2\varphi'^2 = H\frac{\Phi_1 + C_1}{\Phi_1 - \Psi_1}, \qquad (K\psi')^2 = K^2\psi'^2 = K\frac{\Psi_1 + C_1}{\Psi_1 - \Phi_1}.$$

Des deux premières de ces expressions, on conclura d'une part

$$(3)\qquad \frac{H}{\varphi}\varphi'^2 + \frac{K}{\varphi}\psi'^2 = \frac{1}{H}\frac{H}{\varphi}\cdot H\varphi'^2 + \frac{1}{K}\frac{K}{\varphi}\cdot K\psi'^2 = \frac{1}{\Phi_1 - \Psi_1}\left[\frac{lH}{\varphi}(\Phi_1 + C_1) - \frac{lK}{\varphi}(\Psi_1 + C_1)\right],$$

et en différentiant le troisième par rapport à $s$, on aura d'autre part

$$2H\varphi'\frac{d.H\varphi'}{ds} = \frac{1}{(\Phi_1 - \Psi_1)^2}\left[(\Phi_1 - \Psi_1)\left\{H\Phi'_1\varphi' + H'(\Phi_1 + C_1)\right\} - H(\Phi_1 + C_1)(\Phi'_1\varphi' - \Psi'_1\psi')\right]$$

$$= \frac{1}{(\Phi_1 - \Psi_1)^2}\left[H\Phi'_1\varphi'\left\{\Phi_1 - \Psi_1 - (\Phi_1 + C_1)\right\} + (\Phi_1 + C_1)\left\{(\Phi_1 - \Psi_1)H' + H\Psi'_1\psi'\right\}\right],$$

Digitized by Google

d'où l'on déduira, en divisant par $2H\varphi'$,

$$\frac{d.H\varphi'}{ds} = \frac{1}{2\varphi'(\Phi_1-\Psi_1)^2}\left[-(\Psi_1+C_1)\Phi_1'\varphi' + (\Phi_1+C_1)\left\{(\Phi_1-\Psi_1)\left(\frac{lH}{\varphi}\varphi' + \frac{lH}{\psi}\psi'\right) + \Psi_1'\psi'\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2\varphi'(\Phi_1-\Psi_1)^2}\left[-(\Psi_1+C_1)\Phi_1'\varphi' + (\Phi_1+C_1)(\Phi_1-\Psi_1)\frac{lH}{\varphi}\varphi' + (\Phi_1+C_1)\left\{\Psi_1' + (\Phi_1-\Psi_1)\frac{lH}{\psi}\right\}\psi'\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Phi_1+C_1}{\Phi_1-\Psi_1}\frac{lH}{\varphi} + \frac{1}{2\varphi'(\Phi_1-\Psi_1)^2}\left[-(\Psi_1+C_1)\Phi_1'\varphi' + (\Phi_1+C_1)\left\{\Psi_1' + (\Phi_1-\Psi_1)\frac{lH}{\psi}\right\}\psi'\right];$$

et par suite, en retranchant de cette dernière expression la précédente (3) multipliée par $\frac{1}{2}$, et réduisant,

$$\frac{d.H\varphi'}{ds} - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{\varphi}\varphi'^2 + \frac{K}{\varphi}\psi'^2\right) = \frac{1}{2\varphi'(\Phi_1-\Psi_1)^2}\left[-(\Psi_1+C_1)\left\{\Phi_1' - (\Phi_1-\Psi_1)\frac{lK}{\varphi}\right\}\varphi'\right.$$
$$\left. + (\Phi_1+C_1)\left\{\Psi_1' + (\Phi_1-\Psi_1)\frac{lH}{\psi}\right\}\psi'\right],$$

et enfin, en multipliant les deux membres par $H^{-\frac{1}{2}}$, la valeur de l'expression ainsi obtenue pourra s'écrire :

$$H^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{d.H\varphi'}{ds} - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{\varphi}\varphi'^2 + \frac{K}{\varphi}\psi'^2\right)\right] = \frac{1}{2H^{\frac{1}{2}}\varphi'(\Phi_1-\Psi_1)^2}\left[-H^{-\frac{1}{2}}(\Psi_1+C_1)\left\{\Phi_1' + (\Psi_1-\Phi_1)\frac{lK}{\varphi}\right\}H^{\frac{1}{2}}\varphi'\right.$$
$$\left. + K^{-\frac{1}{2}}(\Phi_1+C_1)\left\{\Psi_1' + (\Phi_1-\Psi_1)\frac{lH}{\psi}\right\}K^{\frac{1}{2}}\psi'\right].$$

Or, si l'on se reporte, soit aux équations (29) dans lesquelles on aura fait $\varpi = \varpi_0 = const$, soit aux équations (35), le premier membre de cette dernière équation n'est autre chose que l'expression de la première composante U de la courbure de la trajectoire. On aura donc l'expression cherchée de cette composante U, en fonction des coordonnées $\varphi$ et $\psi$ seulement, en remettant dans le second membre, à la place de $H^{\frac{1}{2}}\varphi'$ et $K^{\frac{1}{2}}\psi'$, leurs valeurs tirées des expressions ci-dessus (1), valeurs dans lesquelles nous conviendrons d'entendre, pour simplifier les écritures, que

Digitized by Google

chaque radical emporte avec lui son signe, qui sera en chaque point de la trajectoire, pour $H^{\frac{1}{2}}\varphi'$ celui qui convient à la différentielle $d\varphi$, et pour $K^{\frac{1}{2}}\psi'$ celui qui appartient à la différentielle $d\psi$, en cette position du mobile dans son mouvement. Avec cette convention, on arrivera donc ainsi à la valeur

$$U=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\Phi_1+C_1}{\Phi_1-\Psi_1}}(\Phi_1-\Psi_1)^2}\left[H^{-\frac{1}{2}}\left[-(\Psi_1+C_1)\right]\left\{\Phi_1'+(\Psi_1-\Phi_1)\frac{lK}{\varphi}\right\}\sqrt{\frac{\Phi_1+C_1}{\Phi_1-\Psi_1}}\right.$$
$$\left.+K^{-\frac{1}{2}}(\Phi_1+C_1)\left\{\Psi_1'+(\Phi_1-\Psi_1)\frac{lH}{\psi}\right\}\sqrt{\frac{-(\Psi_1+C_1)}{\Phi_1-\Psi_1}}\right],$$

c'est-à-dire simplement, en réduisant

$$U=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-(\Psi_1+C_1)}}{(\Phi_1-\Psi_1)^2}\left[H^{-\frac{1}{2}}\left\{\Phi_1'+(\Psi_1-\Phi_1)\frac{lK}{\varphi}\right\}\sqrt{-(\Psi_1+C_1)}\right.$$
$$\left.+K^{-\frac{1}{2}}\left\{\Psi_1'+(\Phi_1-\Psi_1)\frac{lH}{\psi}\right\}\sqrt{\Phi_1+C_1}\right].$$

L'expression de cette première composante U étant ainsi obtenue, pour avoir la seconde il suffira d'observer, d'après les équations (35), que celle-ci doit se déduire de la première en y permutant simplement H et K, $\varphi$ et $\psi$, et $\varphi'$ et $\psi'$, changement qui, étant opéré sur les premiers membres des égalités (1) et (2), d'où nous avons tiré exclusivement la valeur de U qui précède, correspond à permuter seulement dans le second membre H et K, et $\Phi_1$ et $\Psi_1$ ; d'où il suit que l'on obtiendra la valeur demandée de la seconde composante V, en effectuant sur cette dernière expression de U le changement que nous venons de dire, lequel n'affectera pas autrement le facteur entre crochets de cette expression, sinon qu'il se trouvera multiplié par le facteur $\sqrt{-1}$, que l'on pourra dès lors faire sortir des crochets, et faire passer sous le radical qui multiplie cette parenthèse, lequel se changera alors en $\sqrt{\Phi_1+C_1}$. En opérant donc ainsi, il est clair

Digitized by Google

que l'on obtiendra pour déterminer les deux premières composantes, les égalités

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{U}{\sqrt{-(\Psi_1+C_1)}} = \dfrac{V}{\sqrt{\Phi_1+C_1}}, \\ = \dfrac{1}{2(\Phi_1-\Psi_1)^2}\left[H^{-\frac{1}{2}}\left\{\Phi_1'+(\Psi_1-\Phi_1)\dfrac{lK}{\varphi}\right\}\sqrt{-(\Psi_1+C_1)}+K^{-\frac{1}{2}}\left\{\Psi_1'+(\Phi_1-\Psi_1)\dfrac{lH}{\psi}\right\}\sqrt{\Phi_1+C_1}\right]. \end{array}\right.$$

Quant à la troisième composante W, si l'on suppose la surface donnée rattachée à un système triple orthogonal pour une valeur particulière $\varpi_0$ du paramètre $\varpi$, et qu'on veuille en conséquence faire usage de la troisième formule (29), en y faisant $\varpi = \varpi_0$ et $\varpi' = 0$, cette dernière formule étant rapprochée de l'égalité ci-dessus (3) dans laquelle on aura changé $\varphi$ en $\varpi$ (sans toucher à $\varphi'$ ni à $\psi'$), donnera de suite la valeur

$$(5)\qquad W = -\frac{1}{2}\frac{J_0^{-\frac{1}{2}}}{\Phi_1-\Psi_1}\left[\left(\frac{lH}{\varpi}\right)_0(\Phi_1+C_1)-\left(\frac{lK}{\varpi}\right)_0(\Psi_1+C_1)\right],$$

en désignant par $J_0\left(\frac{lH}{\varpi}\right)_0$ et $\left(\frac{lK}{\varpi}\right)_0$ ce que deviennent respectivement les quantités J, $\frac{lH}{\varpi}$, et $\frac{lK}{\varpi}$ supposées calculées pour le système orthogonal, après que l'on y a fait $\varpi = \varpi_0$.

Si au contraire on ne suppose pas la surface donnée astreinte à cette condition, la formule (46) donnera immédiatement, en y substituant les valeurs (1),

$$(6)\qquad W = \frac{1}{\Phi_1-\Psi_1}\left[\frac{1}{R'}(\Phi_1+C_1)-\frac{1}{R''}(\Psi_1+C_1)\right],$$

les expressions des rayons de courbure principaux R′ et R″ de la surface donnée étant celles qui résultent des formules (47).

Les formules que nous venons d'obtenir, sont celles que nous indiquons sans démonstration sous les numéros (80$^{bis}$) et (80$^{ter}$) dans notre paragraphe II, et que nous nous proposions d'établir dans cet Appendice. Nous avons déja fait remarquer que, lorsqu'on y suppose la fonction des forces égale à une constante, elles reproduisaient bien, ainsi que cela est nécessaire, les détermina-

Digitized by Google

tions relatives au rayon de courbure de la ligne géodésique de la surface donnée, rayon dont nous avons donné l'expression générale dans notre paragraphe III pour toutes les surfaces isothermes (voir les formules (138) et (139), page 127).

2° *Surfaces non isothermes.* — Le calcul des expressions des mêmes composantes de la courbure ne différera dans ce cas de celui que nous venons de présenter que par le mode de détermination des dérivées $\varphi'$ et $\psi'$ en fonction de $\varphi$ et $\psi$, pour la trajectoire considérée, calcul que nous effectuerons alors de la façon suivante.

L'équation des forces vives pouvant s'écrire dans ce cas, en tenant compte de l'expression (90) de la fonction des forces $\mathcal{F} + C$ admise comme hypothèse,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C = \frac{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}{\Omega\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi)},$$

d'où, en extrayant les racines,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}{\Omega\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi)}},$$

on aura, en différentiant par rapport à $s$ successivement la deuxième et la troisième des équations (91),

$$(\Omega\Psi_1)_\varphi \sqrt{\frac{\Phi_1\Phi_2}{\Phi + C_1}}\,\varphi' = \sqrt{2}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\Phi - \Psi}{\Omega\Psi_1\Phi_2}}} = -(\Omega\Phi_2)_\psi \sqrt{\frac{-\Psi_1\Psi_2}{\Psi + C_1}}\,\psi',$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\Omega\Psi_1 \sqrt{\frac{\Phi_1\Phi_2}{\Phi + C_1}}\,\varphi' = -\,\Omega\Phi_2 \sqrt{\frac{-\Psi_1\Psi_2}{\Psi + C_1}}\,\psi' = \sqrt{\frac{\Omega\Psi_1\Phi_2}{\Phi - \Psi}},$$

d'où l'on tirera, en simplifiant,

$$\sqrt{\Omega\Phi_1\Psi_1}\,\varphi' = \sqrt{\frac{\Phi + C_1}{\Phi - \Psi}}, \qquad \sqrt{\Omega\Phi_2\Psi_2}\,\psi' = -\sqrt{\frac{\Psi + C_1}{\Psi - \Phi}},$$

Digitized by Google

ou, ce qui est la même chose, en se reportant aux valeurs (90) de H et K, qui constituent les hypothèses relatives à ce cas,

$$H^{\frac{1}{2}}\varphi' = \sqrt{\frac{\Phi + C_1}{\Phi - \Psi}}, \qquad K^{\frac{1}{2}}\psi' = -\sqrt{\frac{-(\Psi + C_1)}{\Phi - \Psi}},$$

valeurs qui donneront, comme tout à l'heure,

$$\begin{cases} H\varphi'^2 = \dfrac{\Phi + C_1}{\Phi - \Psi}, & K\psi'^2 = \dfrac{\Psi + C_1}{\Psi - \Phi} = \dfrac{-(\Psi + C_1)}{\Phi - \Psi}, \\ (H\varphi')^2 = H\dfrac{\Phi + C_1}{\Phi - \Psi}, & (K\psi')^2 = K\dfrac{\Psi + C_1}{\Psi - \Phi}. \end{cases}$$

Or, ces expressions ne diffèrent de celles (1) et (2), que nous avons trouvées pour le cas des surfaces isothermes, et sur lesquelles nous avons basé exclusivement le calcul des formules précédentes relatives à ce cas, que par le changement de $\Phi_1$ et $\Psi_1$ en $\Phi$ et $\Psi$. On obtiendra donc le résultat demandé en effectuant simplement le même changement dans ces formules (4), (5), et (6), ce qui donnera bien nos formules ($92^{bis}$) et ($92^{ter}$), que nous allons récrire ici pour la plus grande facilité du lecteur, en vue de les appliquer tout à l'heure également à un exemple, savoir

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{U}{\sqrt{-(\Psi+C_1)}} = \dfrac{V}{\sqrt{\Phi+C_1}} = \dfrac{1}{2(\Phi-\Psi)^2}\Big[H^{-\frac{1}{2}}\Big\{\Phi' + (\Psi-\Phi)\dfrac{lK}{\varphi}\Big\}\sqrt{-(\Psi+C_1)} \\ \qquad\qquad + K^{-\frac{1}{2}}\Big\{\Psi' + (\Phi-\Psi)\dfrac{lH}{\psi}\Big\}\sqrt{\Phi+C_1}\Big], \end{cases}$$

et

$$(8)\quad \begin{cases} W = -\dfrac{1}{2}\dfrac{J_0^{-\frac{1}{2}}}{\Phi-\Psi}\left[\left(\dfrac{lH}{\varpi}\right)_0(\Phi + C_1) - \left(\dfrac{lK}{\varpi}\right)_0(\Phi + C_1)\right], \\ \text{ou bien} \\ W = \dfrac{1}{\Phi-\Psi}\left[\dfrac{1}{R'}(\Phi + C_1) - \dfrac{1}{R''}(\Psi + C_1)\right], \end{cases}$$

suivant que l'on supposera ou non l'existence d'un système orthogonal.

Digitized by Google

Conformément à l'usage constant que nous avons adopté dans tout le cours de ce travail, nous allons présenter en terminant quelques exemples d'application de ces formules, en reprenant à cet effet les trois principaux exemples de mouvement que nous avons traités dans notre chapitre II.

I° *Ellipsoïde.* — En premier lieu pour le mouvement d'un point sur un ellipsoïde, étudié pages 68-77, en se reportant à nos formules (106$^{bis}$), que nous allons récrire, en y remettant $\lambda$ et $\mu$ à la place de $\varphi$ et $\psi$, à l'aide des quantités $\Lambda$ et M, qui figurent dans les intégrales définitives du mouvement (106$^{ter}$), savoir

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_1 + C_1 = \dfrac{1}{4k}\left[\left\{2k(\lambda-\lambda_0)+u_0^2\right\}\left\{2k(\lambda-\mu_0)+v_0^2\right\}-u_0^2v_0^2\right] = \dfrac{1}{4k}\Lambda, \\ \Psi_1 + C_1 = \dfrac{1}{4k}\left[\left\{2k(\mu-\lambda_0)+u_0^2\right\}\left\{2k(\mu-\mu_0)+v_0^2\right\}-u_0^2v_0^2\right] = \dfrac{1}{4k}\mathrm{M}, \end{array}\right.$$

et, d'autre part, aux expressions (102) de $\Phi_1$ et $\Psi_1$ qui donneront de la même façon, en tenant compte de la valeur (104$^{bis}$) du coefficient ($k$D + C),

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_1 = k\lambda^2 + \left\{\dfrac{1}{2}(u_0^2+v_0^2) - k(\lambda_0+\mu_0)\right\}\lambda, \\ \Psi_1 = k\mu^2 + \left\{\dfrac{1}{2}(u_0^2+v_0^2) - k(\lambda_0+\mu_0)\right\}\mu, \\ \Phi_1' = 2k\lambda + \dfrac{1}{2}(u_0^2+v_0^2) - k(\lambda_0+\mu_0) = k(\lambda-\lambda_0+\lambda-\mu_0) + \dfrac{1}{2}(u_0^2+v_0^2), \\ \Psi_1' = 2k\mu + \dfrac{1}{2}(u_0^2+v_0^2) - k(\lambda_0+\mu_0) = k(\mu-\lambda_0+\mu-\mu_0) + \dfrac{1}{2}(u_0^2+v_0^2), \\ \Phi_1 - \Psi_1 = k(\lambda^2-\mu^2) + \left\{\dfrac{1}{2}(u_0^2+v_0^2) - k(\lambda_0+\mu_0)\right\}(\lambda-\mu) \\ \qquad = (\lambda-\mu)\left[k(\lambda-\lambda_0+\mu-\mu_0) + \dfrac{1}{2}(u_0^2+v_0^2)\right], \end{array}\right.$$

Digitized by Google

et enfin aux expressions (98) de H, K et J, qui donnent, en y faisant toujours les mêmes changements :

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} H^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\dfrac{f(\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}}, \qquad K^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\dfrac{f(\mu)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}}, \\ \qquad\qquad J^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\dfrac{f(\nu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}}, \\ lH = l\left(\dfrac{1}{4}\dfrac{\lambda-\nu}{f(\lambda)}\right) + l(\lambda-\mu) = l\left(\dfrac{1}{4}\dfrac{\lambda-\mu}{f(\lambda)}\right) + l(\lambda-\nu), \\ \dfrac{lH}{\psi} = \dfrac{lH}{\mu} = \dfrac{-1}{\lambda-\mu}, \qquad \dfrac{lH}{\varpi} = \dfrac{lH}{\nu} = \dfrac{-1}{\lambda-\nu}, \end{array}\right.$$

et, par suite, en permutant à la fois $\lambda$ et $\mu$, et H et K,

$$(10)\qquad \frac{lK}{\varphi} = \frac{lK}{\lambda} = \frac{-1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\lambda-\mu}, \qquad \frac{lK}{\varpi} = \frac{lK}{\nu} = \frac{-1}{\mu-\nu},$$

on en conclura sans peine en premier lieu

$$\Phi_1' + (\Psi_1 - \Phi_1)\frac{lK}{\varphi} = k(\lambda - \lambda_0 + \lambda - \mu_0) + \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2)$$

$$-(\lambda-\mu)\left[k(\lambda-\lambda_0+\mu-\mu_0) + \frac{1}{2}(u_0^2+v_0^2)\right]\frac{1}{\lambda-\mu}$$

$$= k\left[\lambda-\lambda_0+\lambda-\mu_0-(\lambda-\lambda_0+\mu-\mu_0)\right] = k(\lambda-\mu),$$

puis, en partant de ce résultat,

$$H^{-\frac{1}{2}}\left\{\Phi_1' + (\Psi_1-\Phi_1)\frac{lK}{\varphi}\right\}\sqrt{-(\Psi_1+C_1)}$$

$$= 2\sqrt{\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}}\,k(\lambda-\mu)\sqrt{\frac{-M}{4k}} = \sqrt{k(\mu-\lambda)}\sqrt{\frac{f(\lambda)M}{\lambda-\nu}},$$

ou, en supposant encore, pour plus de simplicité, la constante $\nu$

Digitized by Google

égale à zéro, ainsi que nous le faisons dans nos formules (106ter),

$$(11)\quad H^{-\frac{1}{2}}\left\{\Phi_1'+(\Psi_1-\Phi_1)\frac{lK}{\varphi}\right\}\sqrt{-(\Psi+C_1)}=\sqrt{k(\mu-\lambda)}\sqrt{\frac{f(\lambda)}{\lambda}}M.$$

On obtiendrait exactement de même, en permutant $\lambda$ et $\mu$,

$$K^{-\frac{1}{2}}\left\{\Psi_1'+(\Phi_1-\Psi_1)\frac{lH}{\psi}\right\}\sqrt{-(\Phi_1+C_1)}=\sqrt{k(\lambda-\mu)}\sqrt{\frac{f(\mu)}{\mu}}\Lambda,$$

ou en multipliant ensuite par $\sqrt{-1}$,

$$K^{-\frac{1}{2}}\left\{\Psi_1'+(\Phi_1-\Psi_1)\frac{lH}{\psi}\right\}\sqrt{\Phi_1+C_1}=\sqrt{k(\mu-\lambda)}\sqrt{\frac{f(\mu)}{\mu}}\Lambda,$$

et l'on en conclura dès lors, en ajoutant à la valeur précédente (11),

$$H^{-\frac{1}{2}}\left\{\Phi_1'+(\Psi_1-\Phi_1)\frac{lK}{\varphi}\right\}\sqrt{-(\Psi_1+C_1)}+K^{-\frac{1}{2}}\left\{\Psi_1'+(\Phi_1-\Psi_1)\frac{lH}{\psi}\right\}\sqrt{\Phi_1+C_1}$$
$$=\sqrt{k(\mu-\lambda)}\left[\sqrt{\frac{f(\lambda)}{\lambda}}M+\sqrt{\frac{f(\mu)}{\mu}}\Lambda\right];$$

et, par conséquent, les formules (4) donneront pour les deux composantes U et V, en y substituant cette dernière expression, ainsi que celles (106bis) de $(\Phi_1+C_1)$ et $(\Psi_1+C_1)$,

$$\frac{U}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-M}{k}}}=\frac{V}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Lambda}{k}}}=\frac{\sqrt{k(\mu-\lambda)}\left[\sqrt{\frac{f(\mu)}{\mu}}\Lambda+\sqrt{\frac{f(\lambda)}{\lambda}}M\right]}{2(\lambda-\mu)^2\left[k(\lambda-\lambda_0+\mu-\mu_0)+\frac{1}{2}(u_0^2+v_0^2)\right]^2},$$

et de même les expressions qui précèdent (9) et (10) devenant, quand on y introduit l'hypothèse $\nu=0$,

$$J_0^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{\frac{f(0)}{\lambda\mu}}=2\frac{abc}{\sqrt{\lambda\mu}},\qquad\left(\frac{lH}{\varpi}\right)_0=\frac{-1}{\lambda},\qquad\left(\frac{lK}{\varpi}\right)_0=\frac{-1}{\mu},$$

Digitized by Google

la formule ci-dessus (5) donnera, pour la troisième composante W :

$$W = -\frac{abc}{\sqrt{\lambda\mu}} \frac{\frac{1}{4k}\left(-\frac{1}{\lambda}\Lambda + \frac{1}{\mu}M\right)}{(\lambda-\mu)\left[k(\lambda-\lambda_0+\mu-\mu_0)+\frac{1}{2}(u_0^2+v_0^2)\right]}.$$

On aura donc définitivement, pour expression des trois composantes de la courbure de la trajectoire représentée par la première équation (106ter),

$$\left\{\begin{aligned} U &= \frac{\sqrt{M}\left[\sqrt{\frac{f(\mu)}{\mu}}\Lambda + \sqrt{\frac{f(\lambda)}{\lambda}}M\right]}{(\lambda-\mu)^{\frac{3}{2}}\left[2k(\lambda-\lambda_0+\mu-\mu_0)+u_0^2+v_0^2\right]^2}, \\ V &= \frac{\sqrt{\Lambda}\left[\sqrt{\frac{f(\mu)}{\mu}}\Lambda + \sqrt{\frac{f(\lambda)}{\lambda}}M\right]}{(\mu-\lambda)^{\frac{3}{2}}\left[2k(\lambda-\lambda_0+\mu-\mu_0)+u_0^2+v_0^2\right]^2}, \\ W &= \frac{abc}{2k}\frac{\mu\Lambda-\lambda M}{(\lambda-\mu)\left[2k(\lambda-\lambda_0+\mu-\mu_0)+u_0^2+v_0^2\right](\lambda\mu)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}\right.$$

ainsi que nous l'avons déjà fait connaître, sans les calculs qui y conduisent, à la page 75 du Mémoire.

Si l'on fait attention que le coefficient $\lambda$ est de degré 0 par rapport aux longueurs, $\lambda$ et $\mu$ de degré 2, et par suite $\Lambda$ et M de degré 4, et $f(\lambda)$ et $f(\mu)$ de degré 6, on s'assure sans peine que ces trois expressions sont bien, comme cela doit être, homogènes et de degré — 1, les deux premières se déduisant d'ailleurs l'une de l'autre par simple permutation des coordonnées $\lambda$ et $\mu$.

Il est facile de voir, en outre, que ces résultats concordent bien, lorsqu'on y suppose $k = 0$, avec ceux que nous avons donnés dans notre paragraphe III (page 176), pour le rayon de courbure de la ligne géodésique de l'ellipsoïde, en attribuant alors à la constante C, qui figure dans cette dernière formule (205), la valeur

$$C = \frac{\mu_0 u_0^2 + \lambda_0 v_0^2}{u_0^2 + v_0^2}$$

Digitized by Google

II° *Paraboloïdes.* — Pour ce second exemple, en nous plaçant, pour fixer les idées, comme nous le faisons dans nos formules (121), dans l'hypothèse du paraboloïde elliptique, nous aurons par les formules (120$^{bis}$) et (118$^{bis}$), en faisant encore dans les premières $\varphi = \lambda$, $\psi = \mu$, et $\varpi = \nu = 0$,

$$
(12)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\Phi_1 + C_1 = \frac{1}{2}g(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda), & \Psi_1 + C_1 = \frac{1}{2}g(\lambda_0 - \mu)(\mu_0 - \mu), \\
\Phi_1' = \frac{1}{2}g\{2\lambda - (\lambda_0 + \mu_0)\} & \Psi_1' = \frac{1}{2}g\{2\mu - (\lambda_0 + \mu_0)\}, \\
\Phi_1 - \Psi_1 = \frac{1}{2}g\left[\lambda^2 - \mu^2 - (\lambda_0 + \mu_0)(\lambda - \mu)\right] = \frac{1}{2}g(\lambda - \mu)(\lambda - \lambda_0 + \mu - \mu_0), & \\
H^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\dfrac{(p+\lambda)(q+\lambda)}{\lambda(\lambda-\mu)}}, & K^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\dfrac{(p+\mu)(q+\mu)}{\mu(\mu-\lambda)}}, \\
lH = l\left(\dfrac{1}{4}\dfrac{\lambda}{(p+\lambda)(q+\lambda)}\right) + l(\lambda-\mu), & lK = l\left(\dfrac{1}{4}\dfrac{\mu}{(p+\mu)(q+\mu)}\right) + l(\mu-\lambda), \\
\dfrac{lH}{\psi} = \dfrac{lH}{\mu} = \dfrac{-1}{\lambda-\mu}, & \dfrac{lK}{\varphi} = \dfrac{lK}{\lambda} = \dfrac{-1}{\mu-\lambda} = \dfrac{1}{\lambda-\mu}.
\end{array}\right.
$$

d'où nous conclurons en premier lieu

$$
\Phi_1' + (\Psi_1 - \Phi_1)\frac{lK}{\varphi} = \frac{1}{2}g(\lambda - \lambda_0 + \lambda - \mu_0) - \frac{1}{2}g(\lambda-\mu)(\lambda - \lambda_0 + \mu - \mu_0)\frac{1}{\lambda-\mu}
$$

$$
= \frac{1}{2}g\left[\lambda - \lambda_0 + \lambda - \mu_0 - (\lambda - \lambda_0 + \mu - \mu_0)\right] = \frac{1}{2}g(\lambda - \mu),
$$

puis, partant de là et des mêmes valeurs qui précèdent,

$$
\left\{\begin{array}{l}
H^{-\frac{1}{2}}\left\{\Phi_1' + (\Psi_1 - \Phi_1)\dfrac{lK}{\varphi}\right\}\sqrt{-(\Psi_1 + C_1)} = 2\sqrt{\dfrac{(p+\lambda)(q+\lambda)}{\lambda(\lambda-\mu)}}\dfrac{1}{2}g(\lambda-\mu)\sqrt{-\dfrac{1}{2}g(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)} \\
\qquad = g\sqrt{-\dfrac{1}{2}g(\lambda-\mu)}\sqrt{\dfrac{1}{\lambda}(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}, \\
K^{-\frac{1}{2}}\left\{\Psi_1' + (\Phi_1 - \Psi_1)\dfrac{lH}{\psi}\right\}\sqrt{-(\Phi_1 + C_1)} = g\sqrt{-\dfrac{1}{2}g(\mu-\lambda)}\sqrt{\dfrac{1}{\mu}(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)},
\end{array}\right.
$$

la seconde expression se déduisant évidemment de la première par la simple permutation de $\lambda$ et $\mu$, de même que les deux

Digitized by Google

colonnes d'expressions du tableau ci-dessus (12), d'où nous avons tiré exclusivement la première de ces expressions. Or, la seconde, qui étant multipliée par $\sqrt{-1}$, devient

$$K^{-\frac{1}{2}}\left\{\Psi_i'+(\Phi_i-\Psi_i)\frac{lH}{\psi}\right\}\sqrt{\Phi_i+C_i}=g\sqrt{\frac{1}{2}g(\mu-\lambda)}\sqrt{\frac{1}{\mu}(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)},$$

donnera, étant additionnée sous cette seconde forme avec la première,

$$H^{-\frac{1}{2}}\left\{\Phi_i'+(\Psi_i-\Phi_i)\frac{lK}{\varphi}\right\}\sqrt{-(\Psi_i+C_i)}+K^{-\frac{1}{2}}\left\{\Psi_i'+(\Phi_i-\Psi_i)\frac{lH}{\psi}\right\}\sqrt{\Phi_i+C_i}$$

$$=g\sqrt{\frac{1}{2}g}\sqrt{\mu-\lambda}\left[\sqrt{\frac{1}{\lambda}(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}+\sqrt{\frac{1}{\mu}(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}\right].$$

Et, par suite, en substituant dans la formule (4), et tenant compte également des autres valeurs fournies par le tableau (12), on aura pour en déterminer les deux premières composantes U et V

$$\frac{U}{\sqrt{-\frac{1}{2}g(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}}=\frac{V}{\sqrt{\frac{1}{2}g(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}}$$

$$=\frac{g\sqrt{\frac{1}{2}g}\sqrt{\mu-\lambda}\left[\sqrt{\frac{1}{\lambda}(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}+\sqrt{\frac{1}{\mu}(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}\right]}{2.\frac{1}{2}g^2(\mu-\lambda)^2(\lambda-\lambda_0+\mu-\mu_0)^2},$$

ou définitivement, en multipliant ces trois égalités par $\sqrt{\frac{1}{2}g(\mu-\lambda)^3}$, et supprimant les facteurs communs haut et bas du dernier rapport,

$$(13)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}{(\lambda-\mu)^3}}}=\dfrac{V}{\sqrt{\dfrac{(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}{(\mu-\lambda)^3}}}\\ \\ =\dfrac{\sqrt{\frac{1}{\lambda}(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}+\sqrt{\frac{1}{\mu}(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}}{(\lambda-\lambda_0+\mu-\mu_0)^2},\end{array}\right.$$

Digitized by Google

les deux composantes U et V se déduisant bien encore l'une de l'autre, comme cela devait être *a priori*, par simple permutation des coordonnées $\lambda$ et $\mu$ (*).

On obtiendra semblablement l'expression de la troisième composante W, dont la forme doit être, au contraire, individuelle, en joignant aux valeurs du tableau (12) celles-ci, qui résultent encore des expressions ($118^{bis}$)

$$\begin{cases} lH = l\left(\frac{1}{4}\frac{\lambda-\mu}{(p+\lambda)(q+\lambda)}\right)+l(\lambda-\nu), & lK = l\left(\frac{1}{4}\frac{\mu-\lambda}{(p+\mu)(q+\mu)}\right)+l(\mu-\nu), \\ \frac{lH}{\varpi} = \frac{lH}{\nu} = \frac{-1}{\lambda-\nu}, & \frac{lK}{\varpi} = \frac{lK}{\nu} = \frac{-1}{\mu-\nu}, \end{cases}$$

et y introduisant ensuite, ainsi que dans l'expression connexe de J l'hypothèse $\nu = 0$, ce qui donnera les valeurs relatives à la surface donnée, savoir

$$\left(\frac{lH}{\varpi}\right)_0 = \left(\frac{lH}{\nu}\right)_0 = -\frac{1}{\lambda}, \qquad \left(\frac{lK}{\varpi}\right)_0 = \left(\frac{lK}{\nu}\right)_0 = -\frac{1}{\mu}, \qquad J_0^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{pq}{\lambda\mu}};$$

de sorte, qu'en substituant alors dans la formule (5), on aura pour cette dernière composante W

$$W = -\frac{2\sqrt{\frac{pq}{\lambda\mu}}\left[-\frac{1}{\lambda}\frac{1}{2}g(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)+\frac{1}{\mu}\frac{1}{2}g(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)\right]}{2\cdot\frac{1}{2}g(\lambda-\mu)(\lambda-\lambda_0+\mu-\mu_0)},$$

ou définitivement, en simplifiant,

$$(14)\quad W = \frac{\sqrt{\frac{pq}{\lambda\mu}}\left[\frac{1}{\lambda}(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)-\frac{1}{\mu}(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)\right]}{(\lambda-\mu)(\lambda_0-\lambda+\mu_0-\mu)}.$$

(*) Pour vérifier l'homogénéité de cette formule, ainsi que celle de la suivante qui fournit l'expression de W, il faut se rappeler, qu'ayant changé $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $a^2$, $b^2$ respectivement en $c\lambda$, $c\mu$, $c\nu$, $cp$, $cq$, pour passer du système des coordonnées elliptiques aux coordonnées paraboloïdales, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sont actuellement d'ordre *linéaire*, ainsi que $p$ et $q$, et non plus de degré 2, comme dans l'exemple précédent.

Digitized by Google

Les formules que nous venons d'obtenir (13) et (14), de même que le calcul qui nous les a fournies, ont rapport, *littéralement*, seulement au cas du paraboloïde elliptique (quel que soit d'ailleurs le sens de la pesanteur, c'est-à-dire le signe de la constante $g$ dans les équations du mouvement (121)); mais elles s'appliqueront exactement de même au cas du paraboloïde hyperbolique, à la seule condition d'y remplacer partout la coordonnée $\mu$ par la coordonnée $\nu$, en supposant alors $\mu = const = 0$.

Enfin, dans le premier cas, bien que ces formules subsistent identiquement, quel que soit le sens de la pesanteur ou le signe de $g$, elles ne fournissent néanmoins en réalité pour aucun point de résultats communs aux deux hypothèses relatives à ce sens vu les limites absolument différentes entre lesquelles les coordonnées $\lambda$ et $\mu$ sont astreintes à varier dans les deux cas.

III° *Cône du second ordre. Mouvement d'un point attiré par le sommet, en raison inverse du carré de la distance.* — Enfin, comme exemple d'application de nos formules (7) et (8), pour le cas plus général pouvant comprendre des surfaces non isothermes, reprenons également en dernier lieu l'exemple que nous traitons dans notre chapitre II, comme application de ce type de calcul, et dans lequel la surface donnée est un cône du second ordre, mais en nous bornant pour plus de facilité, ainsi que nous le faisons en terminant cet exemple, à supposer une seule force d'attraction, émanant du sommet, et attirant le mobile en raison inverse du carré de la distance.

Dans ce cas simple, l'hypothèse $k_1 = 0$ ou $k' = 0$, entraînant tout d'abord, par la valeur (110$^{bis}$) de la fonction $\Psi$, $\Psi(\psi) = 0$, donnera par suite, étant introduite dans les formules (112), (112$^{bis}$), (111), et (113$^{bis}$),

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} C = \dfrac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) - \dfrac{k}{\rho_0}, \qquad C_1 = -\dfrac{1}{2}v_0^2\rho_0^2, \qquad G = DC_1, \\ G - C_1c^2\psi = DC_1 - C_1c^2\psi = C_1(D - c^2\psi), \\ F(\psi) = \displaystyle\int_{\psi_0}^{\psi} \sqrt{\frac{\psi(D-c^2\psi)}{f(\psi)C_1(D-c^2\psi)}}\,d\psi = \frac{1}{\sqrt{-C_1}}\int_{\psi_0}^{\psi}\sqrt{\frac{\psi}{-f(\psi)}}\,d\psi, \end{array}\right.$$

Digitized by Google

d'où nous déduirons, en récrivant encore dans ces dernières valeurs, $r$ et $\lambda$ à la place de $\varphi$ et $\psi$,

$$(16)\quad \begin{cases} C_1 + kr_0 + Cr_0^2 = -\frac{1}{2}v_0^2 r_0^2 + kr_0 + \left\{\frac{1}{2}(u_0^2+v_0^2) - \frac{k}{r_0}\right\} r_0^2 = -\frac{1}{2}u_0^2 r_0^2, \\ \frac{1}{\sqrt{-C_1}}\sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}u_0^2 r_0^2}}{\sqrt{\frac{1}{2}v_0^2 r_0^2}} = \frac{u_0}{v_0}, \\ \sqrt{-C_1}\,F(\psi) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sqrt{\frac{1}{-f(\lambda)}}\,d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{-\lambda(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}; \end{cases}$$

et, dès lors, la trajectoire, qui sera toujours exclusivement représentée par l'équation (114), vu la valeur toujours négative de $C_1$ qui précède, deviendra pour ce cas simple

$$(17)\qquad \frac{r_0}{r} = \frac{1}{v_0^2 r_0} + \left(1 - \frac{k}{v_0^2 r_0}\right)\cos\Omega \pm \frac{u_0}{v_0}\sin\Omega,$$

en désignant, pour abréger, par $\Omega$ l'intégrale elliptique

$$(18)\qquad \Omega = \frac{1}{2}\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{-\lambda(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

dont nous rappellerons tout à l'heure la signification déjà rencontrée.

Cela posé, nos formules ci-dessus (7) et (8), (ou (92$^{bis}$) et (92$^{ter}$)) fourniront, presque sans calculs, les expressions des composantes de la courbure en un point quelconque de cette trajectoire, en remarquant, d'une part, que l'hypothèse $k' = 0$ ou, ce qui est la même chose, $\Psi(\psi) = 0$ donne, par les expressions (110$^{bis}$) et la valeur ci-dessus (15) de $C_1$,

$$19\quad \begin{cases} \Phi + C_1 = k\rho + C\rho^2 + C_1 = \frac{1}{2}\left[2\rho(k + C\rho) - v_0^2\rho_0^2\right], \\ \Psi + C_1 = C_1 = -\frac{1}{2}v_0^2\rho_0^2, \qquad \Phi - \Psi = \Phi = k\rho + C\rho^2, \end{cases}$$

Digitized by Google

et, d'autre part, que les valeurs (108ter) de H, K, J, donneront de même en premier lieu (vu la définition (96) de la fonction $f$)

$$\begin{cases} H^{-\frac{1}{2}} = 1, \quad K^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\varphi}\sqrt{\frac{f(\psi)}{\varpi-\psi}}, \quad J^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\varphi}\sqrt{\frac{f(\varpi)}{\psi-\varpi}}, \quad J_0^{-\frac{1}{2}} = \frac{2abc}{\varphi\psi^{\frac{1}{2}}}, \\ lH = 0, \quad lK = l\left(\frac{1}{4}\frac{\varpi-\psi}{f(\psi)}\right) + 2l\varphi = l\left(\frac{1}{4}\frac{\varphi^2}{f(\psi)}\right) + l(\varpi-\psi), \end{cases}$$

puis de là, par la différentiation,

$$\frac{lH}{\psi} = 0, \quad \frac{lH}{\varpi} = 0, \quad \frac{lK}{\varphi} = \frac{2}{\varphi}, \quad \frac{lK}{\varpi} = \frac{1}{\varpi-\psi}, \quad \left(\frac{lK}{\varpi}\right)_0 = -\frac{1}{\psi}.$$

On conclura donc immédiatement de ces dernières valeurs et des précédentes (19)

$$K^{-\frac{1}{2}}\left\{\Psi' + (\Phi - \Psi')\frac{lH}{\psi}\right\}\sqrt{\Phi + C_1} = 0,$$

$$H^{-\frac{1}{2}}\left\{\Phi' + (\Psi' - \Phi)\frac{lK}{\varphi}\right\}\sqrt{-(\Psi + C_1)}$$

$$= \left[k + 2C\varphi - (k\varphi + C\varphi^2)\frac{2}{\varphi}\right]\sqrt{\frac{1}{2}v_0^2\varphi_0^2} = -\frac{kv_0\varphi_0}{\sqrt{2}},$$

et, par suite, on aura, en substituant ces dernières expressions dans les formules (7) et (8),

$$\begin{cases} \frac{U}{\frac{v_0\varphi_0}{\sqrt{2}}} = \frac{V}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\varphi(k+C\varphi) - v_0^2\varphi_0^2}} = \frac{\frac{-kv_0\varphi_0}{\sqrt{2}}}{2(k\varphi + C\varphi^2)^2} \\ W = -\frac{1}{2}\frac{2abc}{\varphi\psi^{\frac{1}{2}}}\frac{\frac{1}{\psi}\left(-\frac{1}{2}v_0^2\varphi_0^2\right)}{k\varphi + C\varphi^2}. \end{cases}$$



Digitized by Google

d'où finalement, en récrivant $r$ et $\lambda$ à la place de $\varphi$ et $\psi$, pour U, V, W, les trois expressions

$$\left\{\begin{array}{l} U = -\frac{1}{4}\,\dfrac{k v_0^2 r_0^2}{r^2(k+Cr)^2}, \qquad V = -\frac{1}{4}\,\dfrac{k v_0 r_0 \sqrt{2r(k+Cr) - v_0^2 r_0^2}}{r^2(k+Cr)^2}, \\ \qquad\qquad W = \frac{1}{2}\,\dfrac{abc v_0^2 r_0^2}{r^2(k+Cr)\lambda^{\frac{3}{2}}}. \end{array}\right.$$

Si l'on fait attention que, dans ce dernier exemple, la coordonnée $r$ est de degré 1 par rapport aux longueurs, la coordonnée $\lambda$ de degré 2, la constante $k$ par définition de degré 3, et, par suite, la constante C aussi de degré 2, on s'assurera de nouveau très rapidement que pour chacune de ces trois composantes, le numérateur étant de degré 7 et le dénominateur de degré 8, chacune est encore, comme cela doit être, de degré — 1 par rapport aux longueurs.

En réduisant ces trois expressions au même dénominateur, c'est-à-dire en les récrivant ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} U = \dfrac{-k v_0^2 r_0^2 \lambda^{\frac{3}{2}}}{4r^2(k+Cr)^2\lambda^{\frac{3}{2}}}, \qquad V = \dfrac{-k v_0 r_0 \lambda^{\frac{3}{2}} \sqrt{2r(k+Cr) - v_0^2 r_0^2}}{4r^2(k+Cr)^2\lambda^{\frac{3}{2}}}, \\ \qquad\qquad W = \dfrac{2abc v_0^2 r_0^2 (k+Cr)}{4r^2(k+Cr)^2\lambda^{\frac{3}{2}}}, \end{array}\right.$$

puis les élevant au carré et ajoutant, on obtiendra par suite pour le carré de la grandeur de la courbure

$$\left(\frac{1}{R}\right)^2 = U^2 + V^2 + W^2$$

$$= \frac{k^2 v_0^2 r_0^2 \{v_0^2 r_0^2 + 2r(k+Cr) - v_0^2 r_0^2\}\lambda^3 + 4a^2b^2c^2 v_0^4 r_0^4 (k+Cr)^2}{4^2 r^4 (k+Cr)^4 \lambda^3}$$

$$= \frac{2v_0^2 r_0^2 (k+Cr)\left[k^2 r \lambda^3 + 2a^2b^2c^2 v_0^2 r_0^2 (k+Cr)\right]}{2^4 r^4 (k+Cr)^4 \lambda^3},$$

Digitized by Google

d'où, par suite, en extrayant les racines, pour le rayon de courbure lui-même

$$R = \pm \frac{2^{\frac{5}{2}} r^2 (k + Cr)^{\frac{3}{2}} \lambda^{\frac{3}{2}}}{v_0 r_0 \sqrt{k^2 r \lambda^5 + 2a^2 b^2 c^2 v_0^2 r_0^2 (k + Cr)}},$$

formule dans laquelle C représente pour abréger la valeur ci-dessus $C = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) - \frac{k}{r_0}$, et qui concordera bien encore, en tenant compte de cette valeur, lorsqu'on y fera $k = 0$, avec l'expression que nous avons donnée dans notre chapitre III (page 179, *in medio*) pour le rayon de courbure de la ligne géodésique de la même surface, en attribuant à l'autre constante C, qui figure dans cette dernière formule, la valeur $C = \frac{1}{r_0}\sqrt{1 + \frac{u_0^2}{v_0^2}}$.

Puisque l'objet de cette dernière note a ramené de nouveau notre attention sur le problème du mouvement d'un point astreint à rester sur un cône, et attiré par le sommet en raison inverse du carré de la distance, nous n'abandonnerons pas cette question simple et intéressante, sans avoir présenté une discussion facile des résultats obtenus par notre méthode, d'où ressortira comme conclusion une notion exacte et complète du mouvement considéré (*).

Pour conduire à bien cette discussion, nous n'aurions qu'à reprendre, en les calquant pour ainsi dire, la série des considérations et des raisonnements qui nous ont déjà servi pour l'exemple relatif au paraboloïde, mais comme la variable auxiliaire $u$, définie par notre équation (89), sur laquelle reposerait ainsi toute cette discussion, est susceptible dans le problème actuel d'une interprétation simple et remarquable, nous pensons que

(*) Cette discussion, à la vérité, eût dû venir plus logiquement peut-être dans notre chapitre II, immédiatement à la suite des formules intégrales dont elle est tirée, ainsi que nous l'avons fait pour l'exemple de mouvement relatif au paraboloïde. Mais nous avons craint, en agissant ainsi, d'allonger outre mesure ce chapitre II déjà passablement étendu, et nous avons préféré laisser au lecteur la liberté de venir chercher cette discussion dans une simple note tout à la fin de notre travail, si la question lui paraît offrir suffisamment d'intérêt.

Digitized by Google

la théorie qui nous reste à développer offrira à l'esprit une forme concrète, plus nette et plus satisfaisante, en la basant de prime abord sur la signification géométrique de la variable auxiliaire dont nous aurons à faire usage.

Dans ce but, l'équation ci-dessus (17), que nous venons d'obtenir pour la trajectoire dans ce problème restreint, fait ressortir immédiatement une propriété simple de cette trajectoire, qui permet à l'esprit de s'en faire une idée très nette, et d'en conclure ensuite toutes les principales circonstances du mouvement.

Si l'on considère dans cette équation la quantité $\Omega$ comme une variable auxiliaire définie par l'équation (18), cette dernière équation, étant différentiée, donnera, eu égard aux valeurs (109) de H et K sur la surface donnée,

$$(20) \qquad d\Omega = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\sqrt{-\lambda f(\lambda)}}\,d\lambda = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{-\lambda r^2}{4f(\lambda)}}\,d\lambda = \frac{1}{r}\,\mathrm{K}^{\frac{1}{2}}d\lambda,$$

et comme l'on aura dès lors, pour l'élément $ds$ de cette trajectoire, à cause de $\mathrm{H} = 1$,

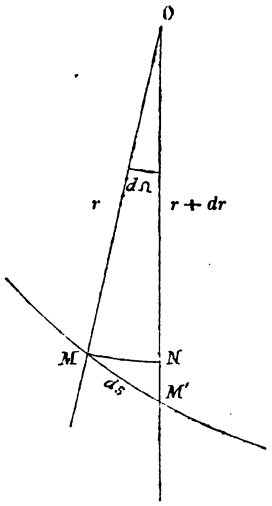
$$ds^2 = dr^2 + \mathrm{K}d\lambda^2, \qquad \mathrm{K}d\lambda^2 = ds^2 - dr^2, \qquad d\Omega = \frac{\sqrt{ds^2 - dr^2}}{r},$$

on apercevra de suite que la différentielle $d\Omega$ représente exactement l'angle compris sur la surface du cône entre deux génératrices infiniment voisines, lequel n'est pas altéré par le développement de la surface sur un plan; car si OM et OM′ sont les deux génératrices correspondant aux deux extrémités de l'élément MM′ de la trajectoire, et que l'on décrive du sommet O comme centre l'arc de cercle infiniment petit MN, lequel peut être assimilé à une perpendiculaire à OM′, la considération du triangle rectangle infinitésimal MNM′ donnera pour mesure de l'angle au sommet $d\Omega$ (voir fig. 9, ci-après)

$$d\Omega = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{OM}} = \frac{\sqrt{ds^2 - dr^2}}{r}.$$

Digitized by Google

On voit donc par là, que dans toute étendue moindre que $\Omega_2$ (ou au plus égale à $\Omega_2$), en désignant par $\Omega_2$ l'angle formé par le développement de la surface entière d'une nappe du cône sur un plan, cette variable $\Omega$ représentera dans le cas actuel l'angle compris dans le même développement, entre une génératrice fixe prise pour origine, et la génératrice correspondant au point considéré de la trajectoire. Mais, si tout en profitant de cette interprétation restreinte, on veut faire usage de la variable $\Omega$ comme variable indépendante, et par suite lui maintenir obligatoirement le caractère de variable essentiellement illimitée, il faudra alors imaginer que l'on ait d'abord enroulé, à la fois dans les deux sens, sur la surface du cône donné l'étendue indéfinie d'un plan, en commençant par faire coïncider une droite tracée dans ce plan, avec une génératrice choisie arbitrairement sur le cône, droite et génératrice à partir desquelles on comptera sur le plan et sur la surface l'angle $\Omega$ comme une coordonnée polaire, positivement dans un sens et négativement dans l'autre jusqu'à l'infini, et considérer dès lors ce même plan comme équivalent au développement de la surface du cône engendrée par l'opération que nous venons de dire (ou comme résultant de l'opération inverse), par suite de laquelle à chaque génératrice de la surface, caractérisée par une certaine valeur de la coordonnée $\lambda$, correspondra une infinité de valeurs de la variable $\Omega$ tant positives que négatives, différant toutes entre elles d'un multiple exact de l'angle $\Omega_2$, dont nous indiquerons un peu plus loin la valeur.



(Fig. 9.)

Digitized by Google

Or, si l'on fait pour un instant

$$(21)\quad \begin{cases} A = \dfrac{k}{v_0^2 r_0}, \qquad B = \dfrac{u_0}{v_0}, \\ E = \dfrac{1}{A}\sqrt{(1-A)^2 + B^2} = \sqrt{1 + \dfrac{1 + B^2 - 2A}{A^2}}, \\ \cos\Omega_1 = \dfrac{1-A}{\sqrt{(1-A)^2 + B^2}}, \qquad \sin\Omega_1 = \dfrac{\pm B}{\sqrt{(1-A)^2 + B^2}}, \end{cases}$$

l'équation de la trajectoire (17), qui devient ainsi tout d'abord

$$\frac{r_0}{r} = A + (1 - A)\cos\Omega + B\sin\Omega,$$

pourra s'écrire

$$(22)\qquad r = \frac{\dfrac{r_0}{A}}{1 + E\cos(\Omega - \Omega_1)},$$

et la même équation représentera en même temps (vu l'invariabilité, dans le développement de la surface sur le plan précité, des éléments qui y figurent) la transformée de la trajectoire dans ce même développement, entendu dans le sens extensif que nous venons d'indiquer tout à l'heure. On voit ainsi que cette nouvelle ligne sera dans tous les cas une section conique, ayant le sommet du cône pour l'un de ses foyers, et que ce sera une ellipse, une hyperbole, ou une parabole, suivant que l'on aura $E \gtrless$ ou $= 1$, ou ce qui est la même chose, suivant que l'état initial donnera

$$(23)\quad 1 + B^2 - 2A = 1 + \frac{u_0^2}{v_0^2} - \frac{2k}{v_0^2 r_0} = \frac{2}{v_0^2}\left[\frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) - \frac{k}{r_0}\right] = \frac{2C}{v_0^2} \gtrless \text{ ou } = 0.$$

Et dès lors on se représentera très aisément la trajectoire elle-même, en supposant d'abord cette conique tracée sur un plan, dont on considérera l'étendue comme formée par la juxtaposition tout autour du pôle d'un nombre infini d'angles égaux à $\Omega_2$, lesquels viendront tous successivement se superposer sur la surface du cône, lorsque l'on imaginera ensuite ce même plan

Digitized by Google

enroulé, de la manière que nous avons dit, sur la surface de celle des deux nappes qui contient la position initiale du mobile.

Il sera facile, en partant de là, de distinguer nettement pour chaque cas la physionomie exacte du mouvement.

1° Si l'on suppose d'abord $C < 0$, ou $k > \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) r_0$, la transformée de la trajectoire étant alors une ellipse, par suite de la valeur (23), la coordonnée $r$ du mobile sera constamment renfermée entre les deux limites $r_1$ et $r_2$, représentant les rayons vecteurs minimum et maximum de cette ellipse, savoir

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l} r_1 = \dfrac{\dfrac{r_0}{A}}{1+E} = \dfrac{r_0}{A + \sqrt{(1-A)^2 + B^2}} = \dfrac{v_0^2 r_0^2}{k + \sqrt{(v_0^2 r_0 - k)^2 + u_0^2 v_0^2 r_0^2}}, \\ r_2 = \dfrac{\dfrac{r_0}{A}}{1-E} = \dfrac{r_0}{A - \sqrt{(1-A)^2 + B^2}} = \dfrac{v_0^2 r_0^2}{k - \sqrt{(v_0^2 r_0 - k)^2 + u_0^2 v_0^2 r_0^2}}, \end{array}\right.$$

et qui sont en même temps, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre, en se reportant aux valeurs (15) des constantes C et $C_1$, les deux racines de l'équation $Cr^2 + kr + C_1 = 0$.

Le point mobile décrira d'ailleurs cette trajectoire toujours dans le même sens à partir de la position initiale, car l'équation des forces vives donnera dans le cas actuel, eu égard à l'expression (109$^{bis}$) de la fonction des forces $\mathcal{F}$ dans laquelle on aura introduit l'hypothèse $k_1 = 0$, pour la valeur du demi-carré de la vitesse

$$(25)\qquad \frac{1}{2}V^2 = \frac{k}{r} + C = \frac{1}{r}(k + Cr) = \frac{1}{r^2}\left[-C_1 + (C_1 + kr + Cr^2)\right],$$

expression dont les deux termes $-C_1$ et $(C_1 + kr + Cr^2)$ sont tous deux positifs (attendu que $r$ reste compris constamment, avons nous dit, entre les deux racines $r_1$ et $r_2$, C étant négatif d'ailleurs par hypothèse), et qui ne peut par suite s'annuler, le premier de ces deux termes étant une constante : d'où il suit que le point mobile ne pourra rétrograder en aucun point de sa trajectoire.

Digitized by Google

En second lieu, l'arc qu'il décrira ainsi, toujours dans le même sens, sur cette trajectoire croîtra au delà de toute limite avec le temps, car la même équation devenant, en remplaçant V par $\frac{ds}{dt}$, et extrayant les racines,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\frac{k}{r} + C}, \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{2}.dt = \pm\left(\frac{k}{r} + C\right)^{-\frac{1}{2}}ds,$$

donnera ensuite en intégrant, et convenant de compter l'arc à partir de la position initiale,

$$\sqrt{2}.t = \pm\int_0^s \left(\frac{k}{r} + C\right)^{-\frac{1}{2}}ds,$$

intégrale qui pourra se calculer effectivement, après que l'on y aura remplacé sous le signe $\int$ la coordonnée $r$ par sa valeur en fonction de $s$, tirée de l'équation $s = \chi(r)$ que l'on obtiendrait par les procédés ordinaires pour expression de l'arc de la courbe (17) ou (22), mais qui, sans même qu'il soit besoin de supposer cette opération effectuée, offre à l'esprit un sens parfaitement net qui entraîne immédiatement la conclusion suivante : à savoir que la valeur de cette intégrale, devant ainsi de toute nécessité devenir infinie pour $t = \infty$, ne pourra l'être qu'à la condition que la limite supérieure $s$ soit alors elle-même infinie, attendu que, $r$ restant constamment compris entre les limites toutes deux positives $r_1$ et $r_2$, l'élément de cette intégrale, même pour $t$ infini, reste lui toujours fini.

Enfin il suit immédiatement de là que la variable $\Omega$ elle-même, considérée comme coordonnée du point mobile, c'est-à-dire alors précisément l'angle polaire correspondant à l'arc $s$ que nous venons d'envisager, variera également toujours dans le même sens, et croîtra aussi avec le temps au delà de toute limite ; et par suite, en revenant à sa signification première relativement à la surface du cône, on voit que le point mobile tournera constamment dans le même sens autour de l'axe de figure de la surface, et qu'il fera un nombre infini de tours par rapport à cet axe, dans la durée infinie du mouvement.

Digitized by Google

De l'ensemble de ces conditions résulte dès lors, en général, exactement comme pour l'exemple relatif au paraboloïde, le caractère de la périodicité pour le mouvement, dans cette première hypothèse ; car si (exceptant seulement le cas où $\Omega_2$ et $2\pi$ seraient deux angles incommensurables entre eux) l'on appelle $m$ et $n$ les deux nombres entiers les plus simples, tels que l'on ait

$$\frac{\Omega_2}{2\pi} = \frac{m}{n} \qquad \text{ou} \qquad n\Omega_2 = 2m\pi,$$

la valeur exacte de l'angle $\Omega_2$ s'obtenant d'ailleurs, en faisant parcourir à la coordonnée $\lambda$, dans l'expression (18) de $\Omega$, successivement toutes les valeurs qui correspondent à tous les points de la surface, c'est-à-dire étant fournie par l'intégrale elliptique

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} \Omega_2 = \frac{1}{2}\int_{-a^2}^{+\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{-\lambda(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} + \frac{1}{2}\int_{-b^2}^{+\infty} \frac{\lambda d\lambda}{-\sqrt{-\lambda(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \\ = \int_{-a^2}^{+\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{-\lambda(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \end{aligned} \right.$$

lorsque le point mobile, après avoir effectué $n$ tours entiers autour de l'axe du cône, se trouvera de nouveau sur la même génératrice, caractérisée par la même valeur de la coordonnée $\lambda$, il est clair que son autre coordonnée $r$, exprimée par l'équation (17) ou (22), reprendra elle aussi la même valeur, car l'angle $\Omega$ se sera alors accru de $n\Omega_2 = 2m\pi$ ; et par suite le mobile se retrouvera de nouveau au même point, quelle que soit d'ailleurs cette position arbitrairement choisie sur la trajectoire.

Le mouvement sera donc périodique dans ce cas, et la durée T de la période (correspondant dès lors à $m$ révolutions complètes sur la transformée (22), que l'on peut évaluer chacune indifféremment à partir d'une position quelconque, selon la plus grande facilité qu'on y trouvera), en l'estimant à partir de la position correspondant au rayon vecteur minimum $r_1$, et tenant compte du changement de signe de $dr$ à chaque limite, sera fournie

Digitized by Google

évidemment par la seconde équation intégrale (111$^{bis}$) sous la forme

$$\pm\sqrt{2}.T=m\left[\int_{r_1}^{r_2}\frac{rdr}{\sqrt{C_1+kr+Cr^2}}+\int_{r_2}^{r_1}\frac{rdr}{-\sqrt{C_1+kr+Cr^2}}\right]=2m\int_{r_1}^{r_2}\frac{rdr}{\sqrt{C_1+kr+Cr^2}},$$

c'est-à-dire, en divisant par $\sqrt{2}$, et ayant égard à la dernière formule de quadrature (113),

$$\pm T=\frac{2m}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{C}\left(\sqrt{C_1+kr_2+Cr_2^2}-\sqrt{C_1+kr_1+Cr_1^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{k}{2C\sqrt{-C}}\left(\arccos\frac{2Cr_2+k}{\sqrt{k^2-4CC_1}}-\arccos\frac{2Cr_1+k}{\sqrt{k^2-4CC_1}}\right)\right].$$

Or les deux racines de l'équation $Cr^2+kr+C_1=0$, étant en vertu des valeurs (15) de C et $C_1$, données par la formule

$$r=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-4CC_1}}{2C}=\frac{-2C_1}{k\pm\sqrt{k^2-4CC_1}}=\frac{v_0^2r_0^2}{k\pm\sqrt{(k-v_0^2r_0)^2+u_0^2v_0^2r_0^2}},$$

sont précisément, ainsi que nous l'avons déjà énoncé, les valeurs (24) des rayons vecteurs limites $r_1$ et $r_2$, d'où il suit que l'on a

$$\left\{\begin{array}{ll} C_1+kr_1+Cr_1^2=0, & C_1+kr_2+Cr_2^2=0,\\ 2Cr_1+k=+\sqrt{k^2-CC_1}, & 2Cr_2+k=-\sqrt{k^2-4CC_1},\\ \arccos\dfrac{2Cr_1+k}{\sqrt{k^2-4CC_1}}=\arccos 1=0, & \arccos\dfrac{2Cr_2+k}{\sqrt{k^2-4CC_1}}=\arccos(-1)=\pi, \end{array}\right.$$

et, par suite, la valeur que nous venons d'obtenir pour la durée de la période T se réduira simplement, eu égard à l'expression (15) de C, à

$$T=\frac{-mk\pi}{C\sqrt{-2C}}=\frac{2mk\pi}{(-2C)^{\frac{3}{2}}}=2m\pi k\left[2k-(u_0^2+v_0^2)r_0\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Digitized by Google

Dans cette première hypothèse de $C < 0$, on pourra donc, en résumé, dépeindre la physionomie exacte du mouvement en disant que :

« *La trajectoire est la courbe fermée, engendrée par l'enroulement sur la surface du cône (entendu comme nous l'avons expliqué) du plan d'une ellipse dont le sommet du cône serait un des foyers, trajectoire que le mobile décrit toujours dans le même sens à partir de la position initiale; en outre, le mouvement est révolutif par rapport à l'axe de figure du cône, et, de plus, périodique, la durée de période étant celle que nous venons d'indiquer.* »

2° Dans les deux autres hypothèses de $C > 0$, ou $C = 0$, c'est-à-dire $k \leqq \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2)r_0$, la transformée de la trajectoire (22) sera alors une hyperbole, ou une parabole, eu égard à la valeur (23), c'est-à-dire une courbe à branche infinie et ouverte, et le mobile décrira sa trajectoire, qu'on peut considérer de nouveau comme engendrée par l'enroulement de cette dernière ligne sur la surface du cône, encore toujours dans le même sens à partir de la position initiale, car la première expression (25) de $\frac{1}{2}V^2$ ne pourra encore s'annuler, C étant positif : d'où il suit, comme tout à l'heure, que le mouvement sera encore révolutif par rapport à l'axe de figure du cône.

Il en résultera de nouveau, comme conséquence immédiate, que la variable $\Omega$, considérée comme coordonnée du point mobile, c'est-à-dire alors par définition l'angle compté de 0 à $+\infty$ sur la surface du cône à partir de la génératrice initiale, dans le sens même du mouvement, ou, ce qui revient au même, sur le plan l'angle polaire correspondant à l'arc $s$ de la courbe (22), variera comme cet arc toujours dans le même sens ; mais, contrairement à ce qui avait lieu dans le cas précédent, il ne grandira plus indéfiniment avec lui, et tendra dans l'hypothèse actuelle vers une limite déterminée, qui sera évidemment $\Omega_1 + \pi$ dans le cas de la parabole, ou $\Omega_3$ dans le cas de l'hyperbole, $\Omega_3$ étant la valeur de l'angle polaire qui correspond à la direction de l'asymptote relative à la branche sur laquelle le point s'en va à l'infini, valeur qui est, par conséquent, celle qui

Digitized by Google

donne $r = \infty$ dans l'équation de la courbe (22), et qui sera dès lors fournie par l'équation

$$1 + E\cos(\Omega_3 - \Omega_1) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \cos(\Omega_3 - \Omega_1) = -\frac{1}{E},$$

ou, en tenant compte des valeurs (21) et (23),

$$\operatorname{tang}(\Omega_3 - \Omega_1) = -\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{E^2}}}{-\frac{1}{E}} = \sqrt{E^2 - 1} = \sqrt{\frac{2C}{A^2 v_0^2}} = \sqrt{\frac{v_0^2 r_0^2}{k^2} 2C},$$

d'où l'on conclura en premier lieu, en substituant à 2C sa valeur (15),

$$\Omega_3 = \Omega_1 + \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{v_0}{k}\sqrt{(u_0^2 + v_0^2) r_0^2 - 2kr_0}\right],$$

puis, en second lieu, en tenant compte des valeurs (21), qui donnent

$$\operatorname{tang}\Omega_1 = \frac{\pm B}{1 - A} = \pm\frac{u_0}{v_0}\frac{1}{1 - \frac{k}{v_0^2 r_0}} = \pm\frac{u_0 v_0 r_0}{v_0^2 r_0 - k},$$

définitivement pour $\Omega_3$ la valeur

$$\Omega_3 = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{v_0}{k}\sqrt{(u_0^2 + v_0^2) r_0^2 - 2kr_0}\right] \pm \operatorname{arc\,tang}\frac{u_0 v_0 r_0}{v_0^2 r_0 - k}.$$

Et par suite, si l'on désigne par $n$ le plus grand nombre entier compris dans la valeur du rapport $\frac{\Omega_1 + \pi}{\Omega_2}$ ou $\frac{\Omega_3}{\Omega_2}$, suivant que l'on aura $C = 0$ ou $C > 0$, le mobile, au lieu de faire, comme dans l'hypothèse précédente, un nombre infini de tours par rapport à l'axe du cône, effectuera simplement un nombre $n$ de tours entiers semblables, toujours dans le même sens, plus une fraction de tour, pendant la durée indéfinie du mouvement.

Maintenant, pour ce qui est de la variation de la coordonnée $r$, il est clair que la nature de la courbe (22), dans l'hypothèse

Digitized by Google

actuelle, ne comportera plus qu'un seul minimum et pas de maximum pour cette coordonnée (car le mouvement s'effectuera évidemment, dans le cas de l'hyperbole, tout entier sur celle des deux branches qui contiendra la position initiale $r_0$, une discontinuité absolue séparant alors les valeursde $r$ qui correspondent aux deux branches infinies), minimum qui sera encore la même valeur $r_1$ que tout à l'heure, savoir

$$r_1 = \frac{r_0}{A(1+E)} = \frac{v_0^2 r_0^2}{k + \sqrt{(v_0^2 r_0 - k)^2 + u_0^2 v_0^2 r_0^2}}, \quad \text{si} \quad E > 1, \quad \text{ou} \quad C > 0,$$

ou autrement la valeur

$$(27) \qquad r_1' = \frac{r_0}{2A} = \frac{-C_1}{k} = \frac{v_0^2 r_0^2}{2k}, \quad \text{si} \quad E = 1, \quad \text{ou} \quad C = 0.$$

Il suit de là que, suivant le signe de la composante initiale $u_0 = \left(\frac{dr}{dt}\right)_0$, si on la suppose d'abord positive, la coordonnée $r$ ira constamment en croissant à partir de la position initiale jusqu'à l'infini, et qu'au contraire, si on la suppose négative, cette même coordonnée ira d'abord en décroissant jusqu'au minimum $r_1$ ou $r_1'$, que nous venons d'indiquer suivant le cas, et croîtra ensuite à partir de cet instant, encore constamment jusqu'à l'infini.

Il résulte encore de là, que la trajectoire effective du mobile sera, de même que sa transformée (22), une courbe *ouverte*, c'est-à-dire illimitée et n'offrant aucun point double, dans deux circonstances, savoir : 1° lorsque la composante initiale $u_0 = \left(\frac{dr}{dt}\right)_0$ sera positive, quel que soit d'ailleurs l'angle $\Omega_2$, parce qu'alors la coordonnée $r$, croissant constamment à partir du premier instant du mouvement, ne repassera jamais deux fois par la même valeur ; 2° lorsque la même composante donnée $u_0$ étant négative, l'angle $\Omega_2$ sera plus grand que $2\Omega_1$, parce que l'étendue de l'angle polaire $\Omega$, dans laquelle la coordonnée $r$ du mobile peut reprendre deux fois la même valeur, étant strictement limitée à $2\Omega_1$ ($r$ atteignant le minimum $r_1$ ou $r_1'$ pour $\Omega = \Omega_1$, et reprenant la valeur $r_0$ pour $\Omega = 2\Omega_1$) et ailleurs ce même angle $2\Omega_1$ ne recouvrant pas

Digitized by Google

alors par hypothèse la surface entière d'une nappe du cône, deux rayons vecteurs égaux de la trajectoire, quels qu'ils soient, ne pourront se superposer sur la surface, et correspondront toujours à des génératrices différentes.

Dans toute autre circonstance (c'est-à-dire par conséquent dans la double hypothèse de $u_0 < 0$, et $\Omega_2 < 2\Omega_1$ ou $\Omega_1 > \frac{1}{2}\Omega_2$), il est facile de voir que la trajectoire se traversera elle-même, ou, en d'autres termes, présentera dans ce cas un certain nombre de points doubles. En effet, la coordonnée $r$ reprenant la même valeur pour deux valeurs de $\Omega$ dont la moyenne arithmétique est $\Omega_1$, c'est-à-dire telles que $\Omega = \Omega'$ et $\Omega = 2\Omega_1 - \Omega'$ ($\Omega'$ étant par hypothèse positif et moindre que $\Omega_1$), si l'on désigne par $m$ le plus grand nombre entier compris dans la valeur du rapport $\frac{2\Omega_1}{\Omega_2}$, nombre qui sera tel par conséquent que l'on ait $\frac{2\Omega_1}{\Omega_2} - m > 0$, et par suite *a fortiori* $\frac{2\Omega_1}{\Omega_2} - \mu > 0$, ou $\Omega_1 - \frac{\mu}{2}\Omega_2 > 0$, en désignant par $\mu$ l'un quelconque des nombres entiers depuis 1 jusqu'à $m$ inclus, on voit que lorsque la coordonnée $\Omega$ du point mobile atteindra successivement les deux valeurs

$$(27^{bis}) \qquad \Omega'_\mu = \Omega_1 - \frac{\mu}{2}\Omega_2 \qquad \text{et} \qquad \Omega''_\mu = \Omega_1 + \frac{\mu}{2}\Omega_2,$$

qui remplissent la condition que nous venons de dire, et de plus dont la différence est $\mu\Omega_2$, on voit alors, disons-nous, que la coordonnée $r$ d'une part reprendra la même valeur, et d'autre part qu'il se retrouvera aussi sur la même génératrice du cône, puisque sa coordonnée $\Omega$ s'étant accrue, en passant de la première position à la seconde, d'un multiple exact de $\Omega_2$, il aura effectué exactement un nombre entier de tours complets par rapport à l'axe de figure, et par conséquent il se retrouvera exactement au même point sur la surface, D'ailleurs chacun des $m$ nombres entiers $\mu$, de 1 à $m$ inclus, donnant ainsi naissance à un couple distinct de valeurs $\Omega'_\mu$ et $\Omega''_\mu$, qui correspondront chacun à une génératrice différente sur la surface du cône, on voit donc que dans ce dernier cas la trajectoire offrira un nombre $m$ de points doubles distincts, correspondant à chacun des couples des

Digitized by Google

valeurs ($27^{bis}$) que nous venons de dire, et dont la coordonnée $r$, que nous représenterons par $r'_\mu$ aura par conséquent pour expression

$$(27^{ter}) \qquad r'_\mu = \frac{r_0}{A\left(1 + E\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2\right)} = \frac{v_0^2 r_0^2}{k\left(1 + E\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2\right)}.$$

Le temps $t_1$ qu'il mettra à atteindre, à partir de l'instant initial, la position la plus rapprochée du sommet (ou le point culminant de la trajectoire, si l'on suppose l'axe du cône vertical, et le sommet vers le haut) sera dans le cas de l'hyperbole, ou de l'hypothèse $C > 0$, fournie par la seconde équation intégrale ($111^{bis}$) prise entre les limites $r_0$ et $r_1$, qui donnera dès lors, en appliquant la formule de quadrature (113), *c)*, et tenant compte du signe de $dr$ dans cette période,

$$\sqrt{2}.t_1 = \int_{r_0}^{r_1} \frac{rdr}{-\sqrt{C_1 + kr + Cr^2}} = \int_{r_1}^{r_0} \frac{rdr}{\sqrt{C_1 + kr + Cr^2}}$$

$$= \frac{1}{C}\left(\sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2} - \sqrt{C_1 + kr_1 + Cr_1^2}\right)$$

$$- \frac{k}{2C\sqrt{C}} \log\left(\frac{r_0\sqrt{C} + \frac{k}{2\sqrt{C}} + \sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2}}{r_1\sqrt{C} + \frac{k}{2\sqrt{C}} + \sqrt{C_1 + kr_1 + Cr_1^2}}\right);$$

d'où l'on tirera, en tenant compte de la première valeur (16), et se rappelant que $r_1$ est toujours l'une des deux racines de l'équation $Cr^2 + kr + C_1 = 0$,

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{C}\frac{u_0 r_0}{\sqrt{2}} - \frac{k}{2C\sqrt{C}} \log\left(\frac{2Cr_0 + k + 2\sqrt{C}\,\frac{u_0 r_0}{\sqrt{2}}}{2Cr_1 + k}\right)\right],$$

ou, en remarquant que dans le cas actuel, C et $C_1$ étant par hypothèse de signes contraires, il en est de même des deux

Digitized by Google

racines de l'équation précitée, et que $r_1$ représentera dès lors la racine positive, en sorte que l'on aura encore

$$r_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4CC_1}}{2C}, \qquad 2Cr_1 + k = +\sqrt{k^2 - 4CC_1},$$

puis, en ayant égard ensuite aux valeurs (15) de C et de $C_1$,

$$t_1 = \frac{1}{2C}\left[u_0 r_0 - \frac{k}{2\sqrt{C}}\log\left(\frac{(u_0^2 + v_0^2)r_0 - k + u_0\sqrt{r_0^2 \cdot 2C}}{\sqrt{k^2 - 4CC_1}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2C}\left[u_0 r_0 - \frac{k}{2\sqrt{C}}\log\left(\frac{(u_0^2 + v_0^2)r_0 \cdot k + u_0\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)r_0^2 - 2kr_0}}{\sqrt{(k - v_0^2 r_0)^2 + u_0^2 v_0^2 r_0^2}}\right)\right].$$

La formule de quadrature (113) *c)*, dont nous venons de faire usage pour le calcul de cette valeur, prenant la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ lorsqu'on y suppose à la limite $C = 0$, le résultat précédent n'est pas applicable au cas de la parabole, et il y a lieu dans ce cas d'évaluer directement l'intervalle de temps analogue, que nous appellerons $t_1'$, en calculant cette fois la même équation ($111^{bis}$) à l'aide de la nouvelle formule de quadrature (omise par oubli dans le tableau (113))

$$\int \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{C_1 + k\varphi}} = \frac{2}{3k^2}(k\varphi - 2C_1)\sqrt{C_1 + k\varphi} + \text{const},$$

et qui donnera par suite dans ce cas (pour ce premier intervalle de temps dans lequel, *dr* étant négatif, il faudra prendre le radical sous le signe $\int$ avec le signe —), comme seconde intégrale du mouvement, à la place de l'équation ($114^{bis}$), cette autre équation

$$(28) \qquad -\frac{\sqrt{2}}{3k^2}(kr - 2C_1)\sqrt{C_1 + kr} = t + C'',$$

dans laquelle la valeur C'' représentera par suite la valeur

$$C'' = -\frac{\sqrt{2}}{3k^2}(kr_0 - 2C_1)\sqrt{C_1 + kr_0}.$$

Digitized by Google

Dès lors, si on se rappelle qu'on a encore par la valeur (27) $C_1 + kr'_1 = 0$, l'équation qui précède donnera immédiatement $t'_1 + C'' = 0$, c'est-à-dire, en tenant compte de la valeur (15) de $C_1$,

$$t'_1 = -C'' = \frac{1}{3k^2}(kr_0 - 2C_1)\sqrt{2(C_1+kr_0)} = \frac{1}{3k^2}(kr_0 + v_0^2 r_0^2)\sqrt{2kr_0 - r_0^2 r_0^2},$$

ou définitivement

$$t'_1 = \frac{r_0^2}{3k^2}(k + v_0^2 r_0)\sqrt{2k - v_0^2 r_0}.$$

Dans les cas que nous avons spécifiés, où la trajectoire présentera un certain nombre de points doubles, les deux époques $t'_\mu$ et $t'_\mu$, correspondant aux deux passages successifs du mobile par l'un de ces points, seront de même évidemment fournies par les deux intégrales

$$\left\{\begin{aligned}
\sqrt{2}.t'_\mu &= \int_{r_0}^{r'_\mu} \frac{rdr}{-\sqrt{C_1 + kr + Cr^2}} = \int_{r'_\mu}^{r_0} \frac{rdr}{\sqrt{C_1 + kr + Cr^2}}, \\
\sqrt{2}.t'_\mu &= \int_{r_0}^{r_1} \frac{rdr}{-\sqrt{C_1 + kr + Cr^2}} + \int_{r_1}^{r'_\mu} \frac{rdr}{\sqrt{C_1 + kr + Cr^2}}, \\
&= \sqrt{2}.t_1 + \int_{r_1}^{r'_\mu} \frac{rdr}{\sqrt{C_1 + kr + Cr^2}}.
\end{aligned}\right.$$

Mais comme, les coordonnées $r'_\mu$ de ces points doubles ayant été définies dans la formule (27$^{ter}$) et dans les raisonnements qui ont servi à l'établir par la valeur correspondante de la coordonnée $\Omega$ du mobile, le calcul effectif de ces deux dernières intégrales reviendra en fait à faire usage de la relation qui lie directement cette coordonnée $\Omega$ du mobile au temps, et qu'il y a par ailleurs d'une façon générale intérêt à connaître cette relation, nous allons la former à cet effet, par l'élimination de la coordonnée $r$ entre l'équation (17) ou (22) et la seconde intégrale (111$^{bis}$) du mouvement, c'est-à-dire l'équation (114$^{bis}$) dans le cas de l'hyperbole, ou l'équation ci-dessus (28) pour celui de la parabole.



Digitized by Google

Observant dans ce but, pour le premier cas, que des deux équations

$$C_1 + kr + Cr^2 = 0, \qquad C_1\left(\frac{1}{r}\right)^2 + k\frac{1}{r} + C = 0,$$

la seconde admet évidemment pour racines les inverses des racines de la première, on en conclura tout d'abord

$$C_1\frac{1}{r^2} + k\frac{1}{r} + C = C_1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right).$$

et, par suite, successivement, en tenant compte des valeurs (15) de $C_1$, et (24) de $r_1$ et $r_2$,

$$C_1 + k + Cr^2 = r^2\left(C_1\frac{1}{r^2} + k\frac{1}{r} + C\right)$$

$$= r^2\left[-\frac{1}{2}v_0^2r_0^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\right] = r^2\cdot\frac{1}{2}v_0^2\left(\frac{r_0}{r_1} - \frac{r_0}{r}\right)\left(\frac{r_0}{r} - \frac{r_0}{r_2}\right)$$

$$= r^2\cdot\frac{1}{2}v_0^2\left[A(1+E) - A\left\{1 + E\cos(\Omega - \Omega_1)\right\}\right]\left[A\left\{1 + E\cos(\Omega - \Omega_1)\right\} - A(1-E)\right]$$

$$= r^2\cdot\frac{1}{2}v_0^2A^2E^2\left[1 - \cos(\Omega - \Omega_1)\right]\left[1 + \cos(\Omega - \Omega_1)\right] = \frac{1}{2}A^2E^2v_0^2r^2\sin^2(\Omega - \Omega_1);$$

d'où, par conséquent, en extrayant les racines, puis substituant à $r$ sa valeur (22),

$$(29) \qquad \sqrt{C_1 + kr + Cr^2} = \frac{AEv_0}{\sqrt{2}}r\sin(\Omega - \Omega_1) = \frac{Ev_0r_0}{\sqrt{2}}\frac{\sin(\Omega - \Omega_1)}{1 + E\cos(\Omega - \Omega_1)},$$

égalité qui se maintiendra à toute époque en grandeur et *en signe*, car pour la valeur de l'angle polaire $\Omega$, $\Omega = \Omega_1$ les deux membres de cette égalité changent simultanément de signes, puisque cette direction est celle qui donne dans l'équation (22) $r = r_1$.

Cela fait, revenant à l'équation intégrale ($114^{bis}$), et la récri-

Digitized by Google

vant, en fusionnant avec la constante du second membre le terme constant $-\frac{k}{2C\sqrt{C}}-\log(2\sqrt{C})$, sous la forme plus simple

$$(30)\quad \frac{1}{\sqrt{2C}}\left[\sqrt{C_1+kr+Cr^2}-\frac{1}{2\sqrt{C}}\log\left(2Cr+k+2\sqrt{C}\sqrt{C_1+kr+Cr^2}\right)\right]=t+\text{const.},$$

nous poserons pour un instant, en vue de faciliter les transformations,

$$(31)\qquad \Theta=2Cr+k+2\sqrt{C}\sqrt{C_1+kr+Cr^2},$$

et nous calculerons alors cette expression, à l'aide de la précédente (29), prise sous sa première forme, de la façon suivante :

$$\Theta=2Cr+k+2\sqrt{C}.\frac{AEv_0}{\sqrt{2}}r\sin(\Omega-\Omega_1)=\left[2C+AEv_0\sqrt{2C}\sin(\Omega-\Omega_1)\right]r+k$$

$$=\left[2Cv_0^2r_0^2+Av_0^2r_0\ r_0Ev_0\sqrt{2C}\sin(\Omega-\Omega_1)\right]\frac{r}{v_0^2r_0^2}+k.$$

Or, la première égalité de définition (21), et l'équation (22) donnant successivement

$$\begin{cases} Ar_0^2r_0=k, & \dfrac{r_0}{A}=\dfrac{v_0^2r_0^2}{k}, \\ r=\dfrac{r_0^2r_0^2}{k\left[1+E\cos(\Omega-\Omega)\right]}, & \dfrac{r}{v_0^2r_0^2}=\dfrac{1}{k\left[1+E\cos(\Omega-\Omega_1)\right]}, \end{cases}$$

cette expression précédente de $\Theta$ pourra s'écrire

$$\Theta=\frac{2Cr_0^2r_0^2+k.Ev_0\sqrt{2Cr_0^2}\sin(\Omega-\Omega_1)}{k\left[1+E\cos(\Omega-\Omega_1)\right]}+k$$

$$=\frac{k^2+2Cr_0^2r_0^2+kE\left[v_0\sqrt{2Cr_0^2}\sin(\Omega-\Omega_1)+k\cos(\Omega-\Omega_1)\right]}{k\left[1+E\cos(\Omega-\Omega_1)\right]},$$

Enfin, la valeur (21) de E donnant, eu égard à la valeur (23), et à celle (21) de A,

$$k^2E^2=k^2\left(1+\frac{1+B^2-2A}{A^2}\right)=k^2\left(1+\frac{2C}{A^2v_0^2}\right)$$

$$=k^2+2C\left(\frac{k}{Av_0}\right)^2=k^2+2Cv_0^2r_0^2,$$

Digitized by Google

on aura, en reportant cette dernière valeur dans la précédente de $\Theta$,

$$\Theta = \frac{k^2E^2 + kE\left[v_0\sqrt{2Cr_0^2}\sin(\Omega-\Omega_1) + k\cos(\Omega-\Omega_1)\right]}{k\left[1 + E\cos(\Omega-\Omega_1)\right]},$$

et, par suite, l'équation ci-dessus (30) deviendra définitivement, en y reportant à la place de l'expression (31) cette dernière valeur simplifiée par la suppression haut et bas du facteur $k$ et au lieu du radical la seconde expression (29), puis faisant passer dans l'autre membre, pour le fondre avec la constante, le terme $\frac{k}{2C\sqrt{2C}}\log E$, et renversant enfin les deux membres,

$$(32)\quad \left\{ \begin{array}{l} t + C'' = \dfrac{1}{2C}\left[Ev_0r_0\cdot\dfrac{\sin(\Omega-\Omega)_1}{1 + E\cos(\Omega-\Omega_1)}\right. \\ \left. - \dfrac{k}{\sqrt{2C}}\log\left(\dfrac{kE + k\cos(\Omega-\Omega_1) + v_0\sqrt{2Cr_0^2}\sin(\Omega-\Omega_1)}{1 + E\cos(\Omega-\Omega_1)}\right)\right], \end{array} \right.$$

la valeur de la constante C'' étant dès lors la suivante

$$(33)\quad C'' = -\frac{1}{2C}\left[\frac{Ev_0r_0\sin\Omega_1}{1 + E\cos\Omega_1} + \frac{k}{\sqrt{2C}}\log\left(\frac{k(E + \cos\Omega_1) - v_0\sqrt{2Cr_0^2}\sin\Omega_1}{1 + E\cos\Omega_1}\right)\right].$$

et l'ensemble des trois équations (18), (22), et (32), constituera alors sous cette nouvelle forme, pour le cas de l'hyperbole ou de $C > 0$, les intégrales du mouvement.

Dès lors, on aura immédiatement dans ce cas, par l'équation que nous venons d'obtenir (32), pour les deux époques $t'_\mu$ et $t''_\mu$ correspondant aux deux passages successifs du mobile par le même point double, époques définies par les deux valeurs ($27^{bis}$) de la coordonnée $\Omega$, les expressions suivantes dans lesquelles C'' représente encore, pour abréger, la valeur (33),

$$\left\{ \begin{array}{l} t'_\mu = -C'' - \dfrac{1}{2C}\left[\dfrac{Ev_0r_0\sin\frac{\mu}{2}\Omega_2}{1 + E\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2} + \dfrac{k}{\sqrt{2C}}\log\left(\dfrac{k\left(E + \cos\frac{\mu}{2}\Omega_2\right) - v_0\sqrt{2Cr_0^2}\sin\frac{\mu}{2}\Omega_2}{1 + E\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2}\right)\right], \\ t''_\mu = -C'' + \dfrac{1}{2C}\left[\dfrac{Ev_0r_0\sin\frac{\mu}{2}\Omega_2}{1 + E\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2} - \dfrac{k}{\sqrt{2C}}\log\left(\dfrac{k\left(E + \cos\frac{\mu}{2}\Omega_2\right) + v_0\sqrt{2Cr_0^2}\sin\frac{\mu}{2}\Omega_2}{1 + E\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2}\right)\right], \end{array} \right.$$

Digitized by Google

et, par suite, pour le temps $T_\mu$ qu'il mettra à décrire la boucle, formée par l'arc de trajectoire qui commence et finit en ce point, la valeur

$$T_\mu = t''_\mu - t'_\mu = \frac{1}{C}\left[\frac{Ev_0r_0\sin\frac{\mu}{2}\Omega_2}{1+E\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2} - \frac{k}{2\sqrt{2C}}\log\left(\frac{k\left(E+\cos\frac{\mu}{2}\Omega^2\right)+v_0\sqrt{2Cr_0^2}\sin\frac{\mu}{2}\Omega_2}{k\left(E+\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2\right)-v_0\sqrt{2Cr_0^2}\sin\frac{\mu}{2}\Omega_2}\right)\right].$$

Semblablement, dans le cas de la parabole ou de $C=0$, l'hypothèse $E=1$, étant introduite dans l'équation (29), donnera tout d'abord

$$(34)\left\{\begin{aligned}\sqrt{C_1+kr} &= \frac{v_0r_0}{\sqrt{2}}\frac{\sin(\Omega-\Omega_1)}{1+\cos(\Omega-\Omega_1)}\\ &= \frac{v_0r_0}{\sqrt{2}}\frac{2\sin\frac{1}{2}(\Omega-\Omega')\cos\frac{1}{2}(\Omega-\Omega_1)}{2\cos^2\frac{1}{2}(\Omega-\Omega_1)} = \frac{v_0r_0}{\sqrt{2}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\Omega-\Omega_1),\end{aligned}\right.$$

égalité qui aura lieu encore à toute époque, en grandeur et en signe, pour la même raison que tout à l'heure. Puis, cela fait, la valeur (34) que nous venons d'écrire et celle (15) de $C_1$ donneront, d'autre part,

$$kr-2C_1 = C_1+kr-3C_1 = \tfrac{1}{2}v_0^2r_0^2\left[\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(\Omega-\Omega_1)+3\right],$$

de sorte qu'en substituant cette dernière expression et la précédente (34) dans l'équation (28), qui représente alors, avons-nous dit, la seconde intégrale (111$^{bis}$), on aura de même pour ce cas, entre $\Omega$ et $t$, l'équation analogue à celle (32) trouvée tout à l'heure

$$t+C'' = \frac{v_0^3r_0^3}{2k^2}\left[1+\frac{1}{3}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}(\Omega-\Omega_1)\right]\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\Omega-\Omega_1),$$

dans laquelle la valeur de la constante $C''$ sera dès lors la suivante

$$C'' = -\frac{v_0^3r_0^3}{2k^2}\left(1+\frac{1}{3}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\Omega_1\right)\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega_1;$$

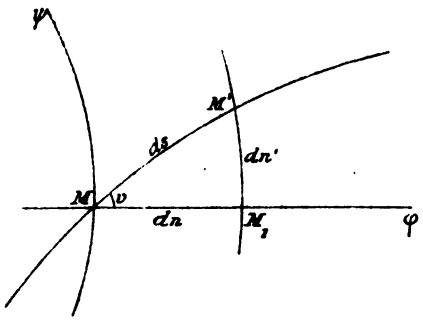


Digitized by Google

et, par suite enfin, les valeurs des époques $t'_\mu$ et $t''_\mu$ et de la durée $T_\mu$ déjà considérées seront, pour cette hypothèse de $C = 0$, les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} t'_\mu &= -C'' - \frac{v_0^5 r_0^5}{2k^2}\left(1 + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^2\frac{\mu}{4}\Omega_2\right)\operatorname{tang}\frac{\mu}{4}\Omega_2, \\ t''_\mu &= -C'' + \frac{v_0^5 r_0^5}{2k^2}\left(1 + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^2\frac{\mu}{4}\Omega_2\right)\operatorname{tang}\frac{\mu}{4}\Omega_2, \\ T_\mu &= t''_\mu - t'_\mu = \frac{v_0^5 r_0^5}{k^2}\left(1 + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^2\frac{\mu}{4}\Omega_2\right)\operatorname{tang}\frac{\mu}{4}\Omega_2. \end{aligned}\right.$$

Enfin, comme dernier élément intéressant à connaître dans cette même hypothèse où il existe des points doubles, proposons-nous, pour terminer cette discussion, d'évaluer l'angle $\Upsilon_\mu$ intérieur à la boucle formée par les deux branches de courbe, qui viennent se croiser en l'un de ces points.




(Fig. 10.)

A cet effet, la courbe coordonnée sur laquelle se compte la coordonnée $\varphi$ ou $r$ étant alors la génératrice, c'est-à-dire une droite, et par suite notre figure 1 du chapitre I^er^ (page 37) présentant, dans le cas actuel, l'aspect ci-contre, fournira évidemment, en ayant égard aux valeurs (43) de la même page, pour déterminer l'angle $\upsilon$, formé par un élément quelconque $ds$ de la trajectoire, pris dans le sens où il est décrit par le mobile, avec l'élément $dn = H^{\frac{1}{2}} . d\varphi = dr$, pris dans le sens où $dr$ croît, c'est-à-dire avec la génératrice en s'éloignant du sommet, la relation fort simple

$$\operatorname{tang}\upsilon = \frac{dn'}{dn} = \frac{\sqrt{K}\,d\psi}{\sqrt{H}\,d\varphi} = \frac{K^{\frac{1}{2}}d\lambda}{dr},$$

Digitized by Google

ou encore, en ayant égard à l'équation (20) de cette Note,

$$\operatorname{tang} v = r\frac{d\Omega}{dr} = \frac{1}{r}\frac{-1}{\left(-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\Omega}\right)} = \frac{-\frac{1}{r}}{\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{r}\right)} = -\left[\frac{dl}{d\Omega}\left(\frac{1}{r}\right)^{-1}\right].$$

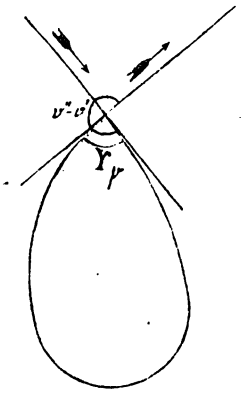
Or, l'équation (22) donnant

$$l\frac{1}{r} = l\frac{A}{r_0} + l\left[1 + E\cos(\Omega - \Omega_1)\right], \quad \frac{dl}{d\Omega}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-E\sin(\Omega - \Omega_1)}{1 + E\cos(\Omega - \Omega_1)},$$

l'expression qui précède deviendra

$$\operatorname{tang} v = \frac{1 + E\cos(\Omega - \Omega_1)}{E\sin(\Omega - \Omega_1)}.$$

Dès lors, on aura pour le même angle $v$ ainsi défini, relatif aux deux éléments de la trajectoire qui se croisent au point double considéré, et qui correspondent respectivement à chacune des valeurs d'un même couple (27$^{bis}$),



(Fig. 11.)

$$\operatorname{tang} v' = \frac{1 + E\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2}{-E\sin\frac{\mu}{2}\Omega_2},$$

$$\operatorname{tang} v'' = \frac{1 + E\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2}{E\sin\frac{\mu}{2}\Omega_2},$$

d'où l'on peut conclure déjà que la génératrice relative au point double est la bissectrice de cet angle $\Upsilon_\mu$, intérieur à la boucle que nous nous proposons d'évaluer. Puis on aura ensuite, pour l'angle formé par ces deux mêmes éléments de trajectoire entre eux (pris chacun dans le sens où il est décrit), angle qui est

Digitized by Google

évidemment égal à $v'' - v'$, d'une part, et à $\pi + \Upsilon$, de l'autre, l'expression suivante de sa tangente

$$\operatorname{tang}(\pi + \Upsilon_\mu) = \operatorname{tang}(v'' - v') = \frac{\operatorname{tang} v'' - \operatorname{tang} v'}{1 + \operatorname{tang} v' \operatorname{tang} v''}$$

$$= \frac{2\dfrac{1 + E\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2}{E\sin\frac{\mu}{2}\Omega_2}}{1 - \left(\dfrac{1 + E\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2}{E\sin\frac{\mu}{2}\Omega_2}\right)^2} = \frac{2E\sin\frac{\mu}{2}\Omega_2\left(1 + E\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2\right)}{E^2\sin^2\frac{\mu}{2}\Omega_2 - \left(1 + E\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2\right)^2},$$

ou bien

$$-\operatorname{tang}\Upsilon_\mu = \frac{E\left(2\sin\frac{\mu}{2}\Omega_2 + E.2\sin\frac{1}{2}\Omega_2\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2\right)}{-\left(1 + 2E\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2\right) - E^2\left(\cos^2\frac{\mu}{2}\Omega_2 - \sin^2\frac{\mu}{2}\Omega_2\right)},$$

d'où, enfin, sous forme plus simple, en changeant les signes des deux membres,

$$\operatorname{tang}\Upsilon_\mu = E\,\frac{2\sin\frac{\mu}{2}\Omega_2 + E\sin\mu\Omega_2}{1 + 2E\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2 + E^2\cos\mu\Omega_2},$$

valeur qui se rapporte également bien au cas de la parabole en y faisant simplement $E = 1$, du moment que tous les calculs qui nous ont servi à l'établir sont complètement indépendants de la valeur de E, et qui devenant avec cette hypothèse

$$\operatorname{tang}\Upsilon_\mu = \frac{2\sin\frac{\mu}{2}\Omega_2\left(1 + \cos\frac{\mu}{2}\Omega_2\right)}{2\cos\frac{\mu}{2}\Omega_2\left(1 + \cos\frac{\mu}{2}\Omega_2\right)} = \operatorname{tang}\frac{\mu}{2}\Omega_2,$$

fournira pour ce cas l'expression simple et remarquable $\Upsilon_\mu = \frac{\mu}{2}\Omega_2$,

Digitized by Google

qui montre que la série de ces angles $\Upsilon_\mu$, considérés pour les différents points doubles, formera dans ce cas une progression arithmétique, dont la raison, comme le premier terme, sera $\frac{1}{2}\Omega_2$.

Comme conclusion, et pour résumer toute cette discussion relative à cette seconde hypothèse ($C > 0$, ou $C = 0$), on pourra de nouveau décrire la physionomie exacte du mouvement pour ce cas en disant que :

« *La trajectoire est alors la courbe illimitée, engendrée par* » *l'enroulement sur la surface du cône du plan d'une hyperbole* » *ou d'une parabole (selon que l'on supposera* $C > 0$, *ou* $C = 0$), » *ayant l'une et l'autre le sommet du cône pour foyer, courbe* » *qui sera ouverte en général, sauf dans la double hypothèse* » *subsidiaire* $u_0 < 0$ *et* $\Omega_1 > \frac{1}{2}\Omega_2$, *auquel cas elle offrira un* » *nombre* m *de points doubles,* m *étant le plus grand nombre* » *entier compris dans le rapport* $\frac{2\Omega_1}{\Omega_2}$. *Le mobile décrira encore* » *cette trajectoire toujours dans le même sens, et en tournant aussi* » *toujours dans le même sens autour de l'axe du cône, et il effec-* » *tuera ainsi* n *tours entiers, plus une fraction de tour, dans la* » *durée indéfinie du mouvement,* n *étant le plus grand nombre* » *entier compris dans le rapport* $\frac{\Omega_2}{\Omega_2}$ *si* $C > 0$, *ou* $\frac{\Omega_1 + \pi}{\Omega_2}$ *si* $C = 0$; » *les différentes évaluations numériques, que comporte dès lors ce* » *mouvement ainsi défini, étant par ailleurs celles que nous* » *avons indiquées.* »

Observons en terminant, comme remarque commune aux deux hypothèses successivement envisagées, que les $m$ points doubles, définis par les valeurs ($27^{bis}$) de la coordonnée $\Omega$, existeront également dans la première hypothèse de $C < 0$, toutes les fois que l'on aura encore $\Omega_1 > \frac{1}{2}\Omega_2$, et quel que soit alors le signe de la composante initiale $u_0 = \left(\frac{dr}{dt}\right)_0$; et l'expression correspondante de l'angle $\Upsilon_\mu$ que nous venons d'obtenir subsisterait de même sans modification, les valeurs seules des durées $t'_\mu$, $t''_\mu$, $T_\mu$ ci-dessus indiquées devant être alors calculées à nouveau à l'aide de l'équation intégrale (115) au lieu de l'équation ($114^{bis}$) employée

Digitized by Google

tout à l'heure. Toutefois, dans cette première hypothèse, la trajectoire étant toujours nécessairement fermée, du moment que le mouvement est périodique, l'existence ou l'absence de ces points doubles, suivant le cas, n'impliquera plus pour le mouvement, comme dans la seconde hypothèse, cette distinction essentielle, à savoir que, pendant toute la durée, le mobile puisse ou ne puisse pas occuper deux fois une même position sur la surface donnée. C'est pourquoi, ne voulant signaler que les caractères essentiels, nous n'avons pas fait mention de l'existence possible de ces points doubles, dans notre discussion relative à la première hypothèse.

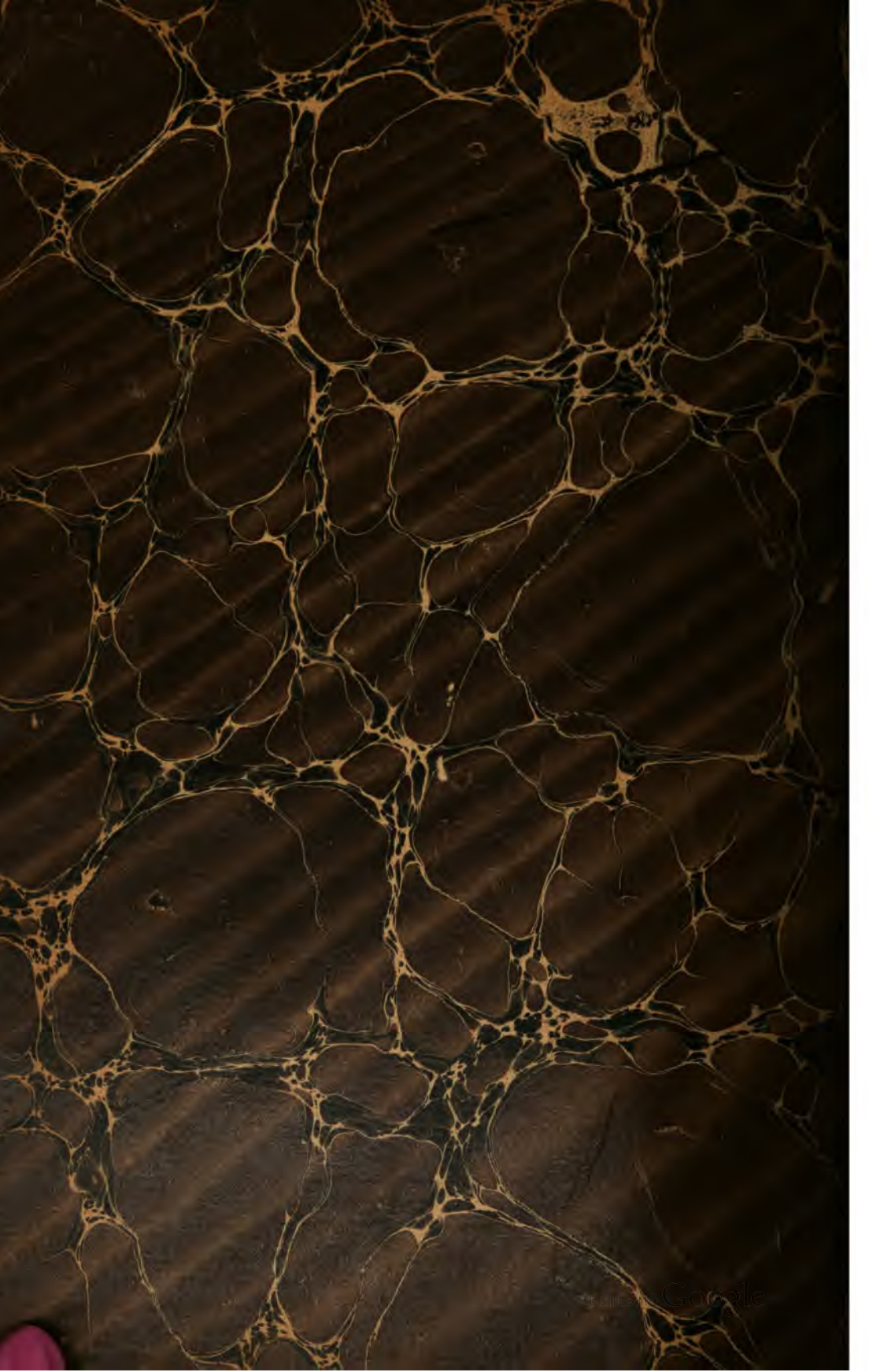
Notons enfin, comme dernière observation, que pour le problème plus général comportant deux forces d'attraction, que nous avons traité dans notre chapitre II, la trajectoire (114), relative au cas de $C_1 < 0$, eût pu tout aussi aisément être ramenée à la même forme ci-dessus (22), les valeurs des constantes étant seules différentes, seulement la variable auxiliaire $\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{-C_1}\,F(\lambda)$ ainsi introduite n'étant plus alors susceptible de la même interprétation simple, par rapport à la surface du cône, que dans la question restreinte que nous venons de traiter, cette simplification apparente de l'équation de la trajectoire n'eût entraîné ensuite aucune des conséquences qui nous ont permis de baser sur elle seule, comme nous venons de le faire, toute la discussion relative à ce dernier problème. Mais cette discussion peut alors, de même que dans l'autre cas de la trajectoire (113ter), relative à l'hypothèse $C_1 > 0$, être également menée à bien en usant de cette même variable $\Omega$, comme nous l'avons fait de la variable $u$ dans l'exemple relatif au paraboloïde, attendu qu'elle est alors, à un facteur constant près, précisément cette même variable auxiliaire $u$ définie par notre équation (89), qui devient l'équation (75) lorsque l'on suppose la surface isotherme. Et, dès lors, la même série de considérations et de raisonnements, que nous venons de rappeler, permettra encore, même dans ces différents cas, d'arriver facilement à la connaissance de toutes les principales circonstances du mouvement.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



NOV 26 1909

Digitized by Google

Math 9108.87
Memoire sur l'emploi des coordonn
Cabot Science 003362256
3 2044 091 923 995

Digitized by Google